

「调和级数」为什么叫调和级数？

小圆滚滚

这个是数学史的问题。

「调和」，实际上也就是「和谐」(harmonic)，现有文献表明，它是由古希腊毕达哥拉斯学派最早发现、命名并加以系统研究的一个数学概念。

毕达哥拉斯学派，既是一个学术团体，也是一个宗教组织。他们喜欢从神秘主义的角度来研究数学，或者说，喜欢从数学中发现某种「神秘性」(mystery)，因此他们对一些特殊的数量关系尤其关心，就比如算术中的「完全数」、「亲和数」、「三角形数」、「正方形数」，其中当然也包括题主在这里提及的「调和数」。

「调和数」是毕达哥拉斯学派[1]从琴弦长度的研究上发现的一种数量关系。他们发现，一根拉紧的琴弦（1倍长的琴弦）如果弹出某个音调，比如说是do，那么取其1/2弦长，弹出的音调就是高八度的do，取其2/3弦长，就会弹出高五度的so。

和谐的声音居然是琴弦长度的比例造成的！于是，毕达哥拉斯学派就把能够生成谐音的这些表示弦长比例的数也认为是和谐的。

那么，这些和谐的数究竟有什么奇妙的特征呢？注意到

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 1 = 3 : 4 : 6$$

它们的倒数刚好构成等差数列：2, $\frac{3}{2}$, 1以及 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ ，也就是说：如果一个数列各项取倒数后成等差数列，那么原数列就称为调和数列，即和谐的一列数。

明白了这一点，我们应该不会对调和平均数 (harmonic mean) 的称呼感到讶异了，因为p,q与其调和平均数 $H = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$ 的倒数，正是构成了一个等差数列： $\frac{1}{p}$, $\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{2}$, $\frac{1}{q}$ ，于是它们本身p, H, q就构成了一个调和数列，居中的那个数就称为左右两数的调和平均数[2]。同样地，我们也不会对调和级数 (harmonic series) 的名称感到困惑了，回顾一下，调和级数事实上是数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$ 的和。这个数列各项的倒数1, 2, 3, ...显然就是等差数列，于是它们各项本身 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$ 确实也就构成了一个调和数列。参考

1. 【1】未必是毕达哥拉斯本人，但前面说了，这派比较神秘，他们的发现常常都是用学派领袖毕达哥拉斯冠名，至于真正的发现者却不得其详，包括举世闻名的「毕达哥拉斯定理」都是如此。
2. 【2】这正如，算术数列 (arithmetic sequence) (等差数列) 居中的项是前后两项的算术平均值 (arithmetic mean)、几何数列 (geometric sequence) (等比数列) 居中的项是前后两项的几何平均值 (geometric mean) 一样。