度规张量

小圆滚滚

1 开门见山

物体如果不受力，那么就会静止或者匀速直线运动。这是牛一定律。在太空中，在一个个大质量天体的夹缝中。脱离了他们的领域，又是真空。那么就很容易展现这条规律。这是个稳定状态，会一直持续下去。参考2021年12月9日15点40分,“天宫课堂”。

一个钢球，粘上一根木棍，像火柴棒，那么固定木棍的一端，给钢球一个初力，只要该力方向不在端点与钢球的直线上，那么这个火柴棒就会做匀速圆周运动。此时，钢球只受到木棍粘结的向心力。整个过程没有力做功，所以也是个稳定状态，会一直持续下去。

可以看到，在物理作用下，不受外力的情况会造成运动轨迹要么是直线、要么是圆圈。

第三个试验就不是思维试验了。是我们身边就能印证的，那就是单摆。摆角小于5°（现在一般认为是，摆长1米重力a=9.8，小于10°的偏差不超过0.2%）的条件下振动时,可近似认为是简谐运动。弹簧振子的简谐运动$F=-kx$.这两个试验的运动轨迹在地面上的投影，如果加上地面在垂直方向上的匀速运动。那么就能获得三角函数$sinx$或者$cosx$的函数图像。

以上说的直线、圆、sinx.这些图像都在平面上。而我们的DNA排列结构，我们的精子运动轨迹，都是螺旋的，他们的构成，可以看成是圆周运动在垂直方向上的延伸。这些运动在不受外力的情况下都是稳定状态，会一直持续下去。阻碍单摆、弹簧的阻力，空气算次要因素，端点的伸缩和摩擦才是主因。弹簧的形变过程才是主因。

那么用这些简单基础的图形（直线、圆），怎么描述其他函数图像呢？这就用到了微积分、用到了泰勒展开中的线性主部。用到了近似、用到了傅里叶级数。

线性代数是一种降维模拟近似的工具。它能够通过简单的近似去逼近真实的复杂。可以通过降维的方式拆解问题。然后确立原则之后，再推导至高维。然后再复合高维因素，形成真正的高维解决方案。

曲面（球面、椭球面、双曲面）是三元二阶的，我们降维成平面，对应圆、椭圆、双曲线就是二元一阶的。有了线性代数，我们可以一阶一阶的升上去。升的过程就是自乘、就是平方。就是度规张量。线性代数让我们研究不受力的简单运动。掌握规律，理解规律。然后我们使用这些规律可以推算估量极限限定起发展方向。达到控制高阶高维的目的。从严丝合缝，到八九不离十。这是数学给我们的强大工具、破解利器。

接下来，我们用两根直线，来解决平面上的所有变换。

利用平行四边形的两条棱的变化，可以找到平面上任意一点，能够涂抹、覆盖平面上的所有现象。那么怎么控制这个平行四边形？主要控制长度和她们俩的夹角。那么长度肯定有单位，夹角肯定有起始边。那么我们就规定x轴为起始边。x轴上的单位1为ihat，y轴上的单位1为jhat。$\hat{i}$和$\hat{j}$都是向量。坐标形式i(1, 0),j(0, 1)写成向量形式 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

在此方阵的基础上进行数值的改变，就是在平面内进行线性变换。

一个向量左乘一个矩阵，等于是将这个向量变形到这个变形坐标系，或者说将斜角坐标的读数转换成直角坐标读数的解释。

左乘像极了一个函数映射f(x).x是输入，f(x)是结果（输出），自变量、因变量的关系。这里的输入和输出是对等的，一对一的、平权的。而f则是一个变换。而不管怎么变换，x自身蕴含的道理是不变的。就像平行世界中（或者另一个例子是不同星球），各个世界的物理参数可能不相等，但是原理等比例。基本原理放诸任何世界都行得通。

比如单摆周期$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，（ l是摆长， g是重力加速度。易知单摆的周期与摆幅、物体质量无关）。

弹簧振子周期$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，其中k表示弹簧的劲度系数（倔强系数、弹性系数、刚度系数），在数值上等于弹簧伸长（或缩短）单位长度时的弹力$F = ma$。m表示弹簧振子（小球）的质量，所以看见弹簧也可以返过去推出单摆。$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{ma}{l}}}$.

2 度规张量

用一句最土最直白的话来说，度量张量就是用来把斜角坐标的读数转换成直角坐标读数的，度量张量的本质就是坐标变换。

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

这个坐标系中求长度的公式是:

$$[x_1 \quad y_1] \times \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

它的度量张量就是:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 2.5 \\ 2.5 & 5 \end{bmatrix}$$

像不像线性代数里的二次型？

最好的解释二次型的例子就是椭圆在直角坐标系下的形状。扶正。特征值、特征向量、旋转和拉伸变换。

勾股定理只适用于正交坐标系，如果网格有所伸缩或其坐标轴不相互垂直，那么勾股定理不再适用。但是在局部线性近似时，可以有一个更普适的表达式。一般的距离的平方总可以写成两条边所有的可能组合乘以某些数字的求和：

$$\begin{aligned}(ds)^2 = & g_{00} \cdot dx_0 dx_0 \\ & + g_{01} \cdot dx_0 dx_1 \\ & + g_{10} \cdot dx_1 dx_0 \\ & + g_{11} \cdot dx_1 dx_1\end{aligned}$$

Metric tensor

g_{00}	g_{01}
g_{10}	g_{11}

进一步缩写成：

$(ds)^2 = g_{\mu\nu} \cdot d\mu d\nu$

这个公式尤其可以让我们表示速度矢量的模：

$||\vec{v}||^2 = g_{\mu\nu} \cdot v^\mu v^\nu$

即：

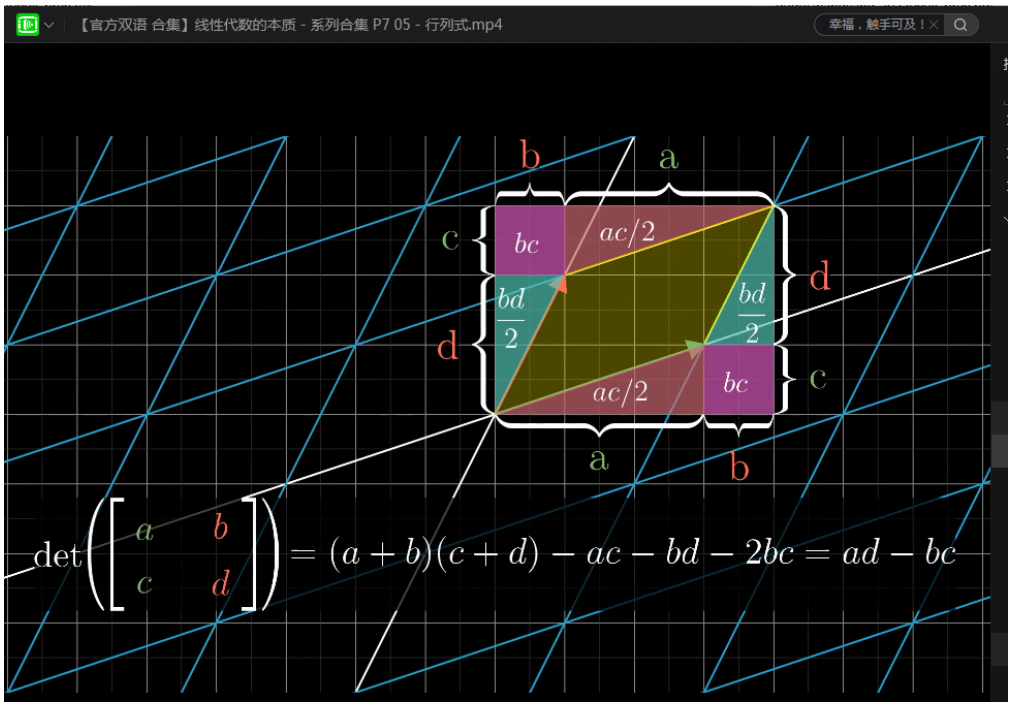
$c^2 = g_{\mu\nu} \cdot v^\mu v^\nu$

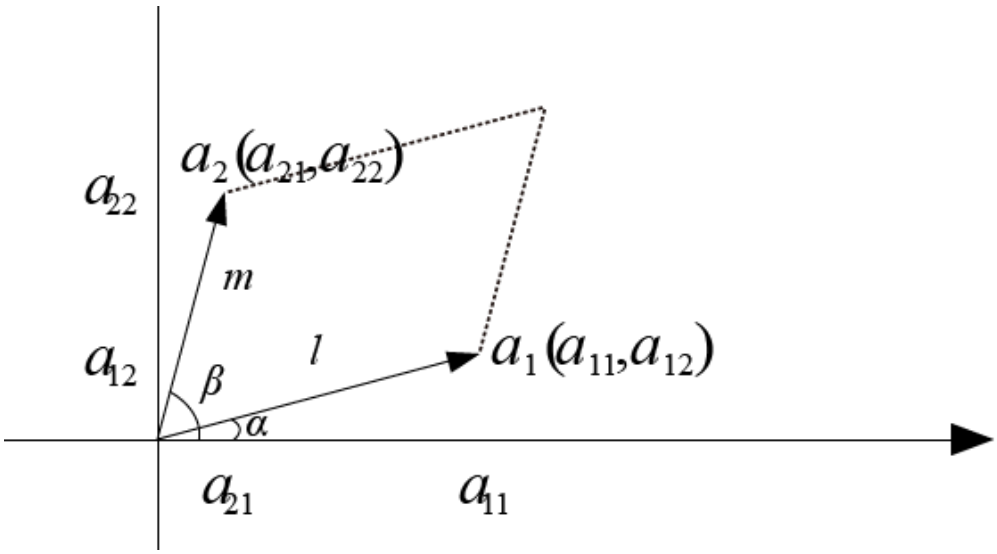
3 行列式基本知识

行列式代表了线性变换对单位基向量组成的基方阵挤压或者拉伸产生的面积与单位面积的比值。

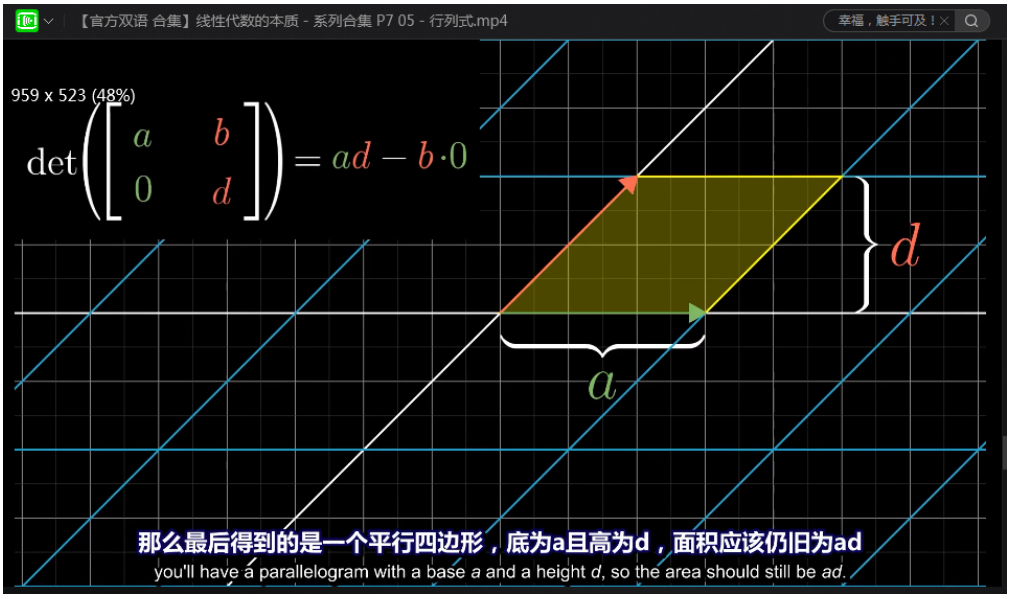
其中基向量只是一种坐标系的选取，基向量彼此之间方向上不一定正交、模值不一定相等。但是一定线性无关。

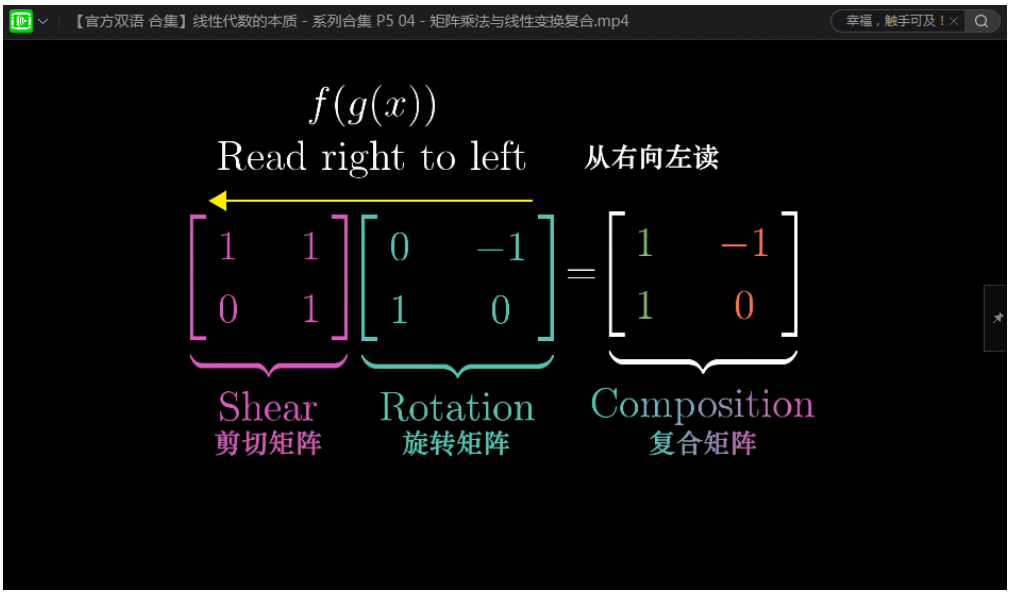
线性无关意思是：一组向量中任一一个向量都不可以用组中其它向量的加法和标量乘法组合而成。





另外：剪贴矩阵、以及旋转矩阵，应该放在行列式之前讲。





靠剪贴以及剪贴的系数变化，再加旋转，就能完成所有变换了。
二阶行列式的几何意义：平行四边形的面积。

$$
\begin{aligned}
S &= l \cdot m \cdot sin(\beta - \alpha) \\
&= l \cdot m(sin\beta cos\alpha - cos\beta sin\alpha) \\
&= lcos\alpha \cdot msin\beta - lsin\alpha \cdot mcos\beta \\
&= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\end{aligned}
$$

4 线性代数基础知识

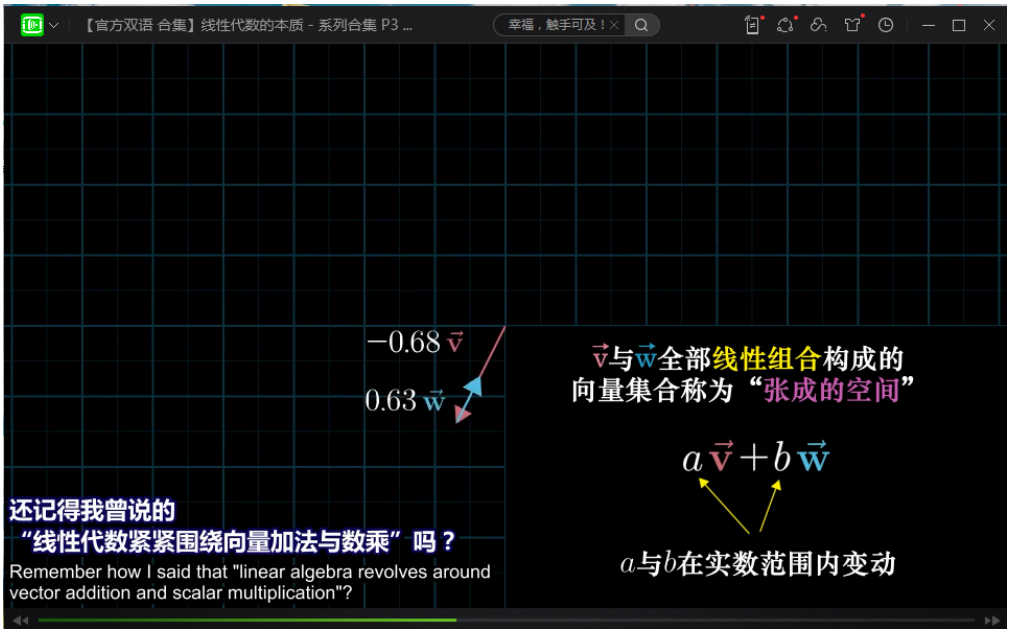
从一个变量x1...xn到变量y1...yn的线性变换。

线性变换是一个向量空间和另一个向量空间(或者仍是同一个向量空间)之间沟通的桥梁。所谓桥梁，其实就是函数映射。线性变换(线性映射)就是把空间**V**中向量映射到空间**W**中向量的一个函数，且满足线性(两条性质)：可加性和标量乘法。

线性代数围绕两种基本运算：向量加法与向量数乘。

4.1 线性代数的法则

矩阵的列向量（向量竖写）、矩阵的加法（列向量横加）、线性变换的左乘（左侧的变换，针对的是右侧的输入是1为单位的基，并且向量表示方式是竖排表示才能左乘，如果是横排表示，那么线性变换的矩阵就得写到右侧。）是线性代数的法则。对比行列式的加法是一行相加，行列式的数乘是一行相乘。



4.2 线性变换

1.原点保持固定（否则平面上的点就没有坐标，也就没有意义了）。

2.网格线保持平行且等距分布（直线依旧是直线）。

简单说，平面的线性变换，只需要四个数就可以确定如何从一个世界对等转换到另一个世界，而三维体的线性变换，只需要9个数就可以。缩放基向量，再相加。就是拆解矩阵的真滴。

向量竖着写才可能横着加，基向量（basis vectors）是个基方阵。基向量方阵中数值的变化代表了**基向量的线性变化**，也就对任意输入（in）产生了一对一的线性变换的影响，输出（out）。

特例：如果基方阵中的某个特征向量可以映射到其他维度上，那么基矩阵可能就不是方阵了。但是这属于函数映射之后又加的条件，所以按照维度不映射算，基向量都是方阵形式表达。

线性方程组的含义就是系数矩阵A（变换矩阵），乘以未知数向量$\vec{x}$（x, y, z）等于目标向量$\vec{v}$，去寻找在A函数下，得到最终结果$\vec{v}$，求输入$\vec{x}$.解的数量可以由A的行列式值，也就是是否压缩成面积为0，来确定。

A左乘A^{-1}就等于没有变换。$A^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.行列式不为零，就一定存在逆变换。

从线性代数的角度理解函数，就是函数可以映射压缩成低维。但是不能由低维解压对应到高维。三维空间可以压缩成一个平面、一条直线、一个点。因为他们都是零体积。当变换的结果是一条直线时，也就是说结果是一维的，我们称这个变换的秩为1.平面秩为2。剪贴变换的特征向量只有一个，它的秩就是1.只在x轴上的向量在变换后依然停留在x轴上。

4.3 线性组合（Linear combinations）

任何两个数乘向量的和，都可以组合成一个新的向量.这个新向量称为这两个向量的线性组合。在坐标系中，依赖于我们选取使用的基，如果基选择不同，但是线性组合相同（特征值相同），那么我们可以认为这两个矩阵是相似矩阵。

$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}$

在线性组合中，a 和 b 是变量，即Scalars(标量)，如果它们不断变化，则得到的新向量也可以覆盖整个直角坐标系（不包括 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 在一条直线或一个点上的情况）。

线性组合描述的是本世界内的函数映射。而将这种映射的关系，对应到其他世界，只需要调整基向量就可以。也就是各个世界的物理规律是统一的。但是表现的参数大小不同。那个参数系数对应的法则，就是这种映射关系。比如重力加速度g、重力势能公式$E_p = mgh$.

把 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 看做基本向量，它们和 $\hat{i}$ 、$\hat{j}$ 一样，通过改变 scalars，线性变换后的向量集都可以覆盖整个坐标系，区别在于，对于同样的输出向量（方向和长度一样），它们的 scalars 的值是不同的，选取不同的向量作为基本向量，可以构建不同的坐标系。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ y_n = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

向量 $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$变为 $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$的变换

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x + a_{12}y \\ y_1 = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

举例：旋转变化

$\begin{cases} x_1 = xcos\varphi - ysin\varphi \\ y_1 = xsin\varphi + ycos\varphi \end{cases}$对应的矩阵就是 $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$

对应3Blue1Brown的视频

$$\begin{bmatrix} x_{in} \\ y_{in} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{out} \\ y_{out} \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{v} = -1\widehat{i} + 2\widehat{j}$

$$\overrightarrow{v} = -1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1(1) + 2(3) \\ -1(-2) + 2(0) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \widehat{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x + 3y \\ -2x + 0y \end{bmatrix}$$

这里x，y可以看成是系数（常数作为系数时可以乘入矩阵，后面的得数利用矩阵的加法）

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \tag{1}$$

平面线性变换因为是二维空间，所以是一个2*2的矩阵。

这里矩阵放在向量左边，类似一个函数，则逆时针旋转90度，则可以写成

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

对应原来x(1, 0)变成了(0, 1)，y(0, 1)变成了(-1, 0)

举个例子，原矢量yuan=(3, 2), x = 3, y = 2代入(1)式

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + (-2) \\ 3 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

注意，这里可利用矩阵的乘法的法则，但直观理解是x左乘了矩阵的列向量中的左列，y左乘了矩阵的列向量中的右列。

计算后的矢量hou=(-2, 3)

4.4 基方阵

对于方阵而言，矩阵不会进行维度的升降，所以矩阵代表的运动实际上只有两种：

1.旋转

2.拉伸（实际上应该是剪贴，因为拉伸给人的感觉是边长不变那就错了。）

在这里看了一眼同济大学第五版线性代数。果勒个然。大学时候，就是先给定义再给证明。丝毫不管你懂了还是没懂，受得了还是受不了。看人家3Blue1Brown，先将什么叫做线性，什么叫做线性变换。然后如何在平面坐标系进行网格的旋转、拉扯。对应再看一个输入的坐标是如何变换成一个输出的坐标的。左乘的那个函数是一个二维方阵，右部被乘的是一个小写黑体字母就可以表示的列向量（行向量会用列向量的转置进行书写）。

下面是个人的理解：然后再根据矩阵的加法，可以知道矩阵乘法的意义。

输入向量$(x_{original}, y_{original})$和输出向量$(x_{changed}, y_{changed})$

在平面直角坐标系的坐标对应变换函数 $\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} \end{bmatrix}$,

其中基向量中的一个特征向量 $\hat{i}_{unit} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

另一个特征向量 $\hat{j}_{unit} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

则线性变化就是transformed多少个基向量$\hat{i}_{unit}$和transformed多少个基向量$\hat{j}_{unit}$

对于$\vec{v} = -1\hat{i} + 2\hat{j}$中$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$变成了$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$,

ps:一个矩阵中填充的是独立的n个特征向量，那它们是可以表示一个n维线性空间的一组基的。

特殊的，$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$长短轴相等的拉伸矩阵，所有的非零向量都是特征向量。

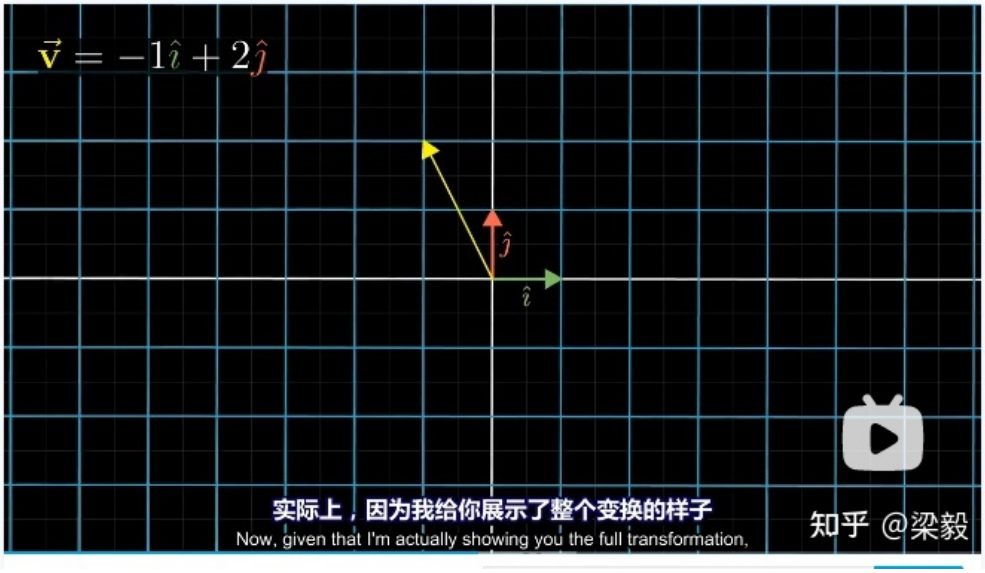
$\begin{bmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{bmatrix}$旋转矩阵，只有旋转变换，没有伸缩变换。没有特征值。也没有特征向量。

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$剪切矩阵，只有一个x轴的特征向量。

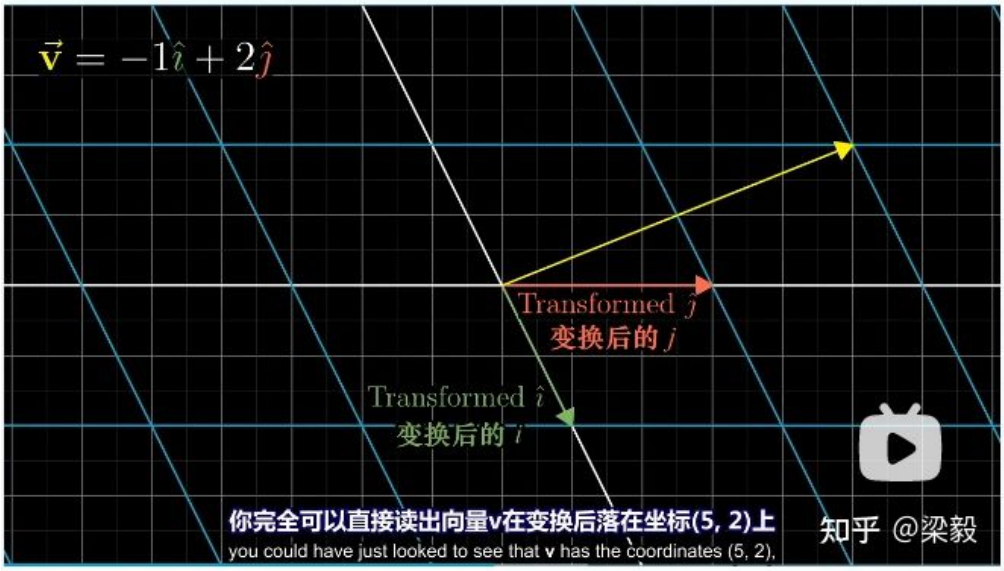
以上这些都没有相似矩阵，因为他们的变换都不稳定。

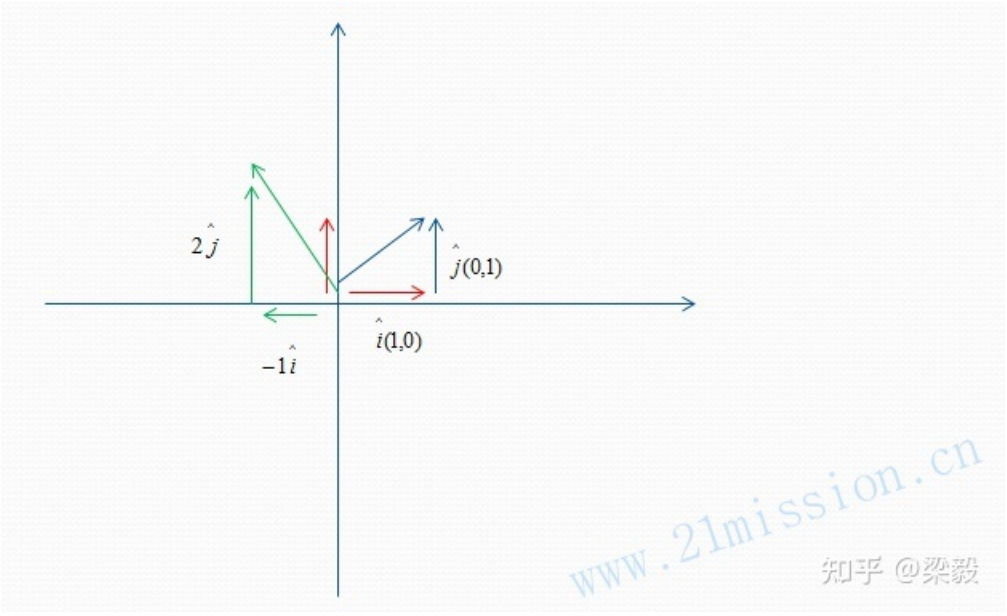
【官方双语/合集】线性代数的本质 - 系列合集

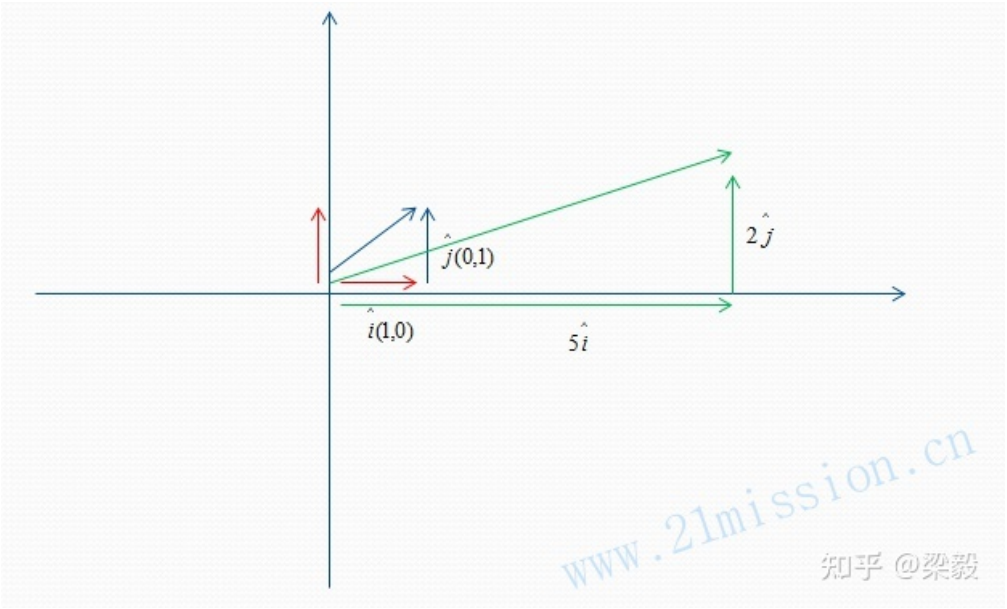
233.1万播放 · 总弹幕数2.4万　2016-10-18 22:01:58 全站排行榜最高第40名



是因为$\vec{v}$经历了横坐标乘以$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$个基向量$\hat{i}_{unit}$和纵坐标乘以$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$个基向量$\hat{j}_{unit}$.

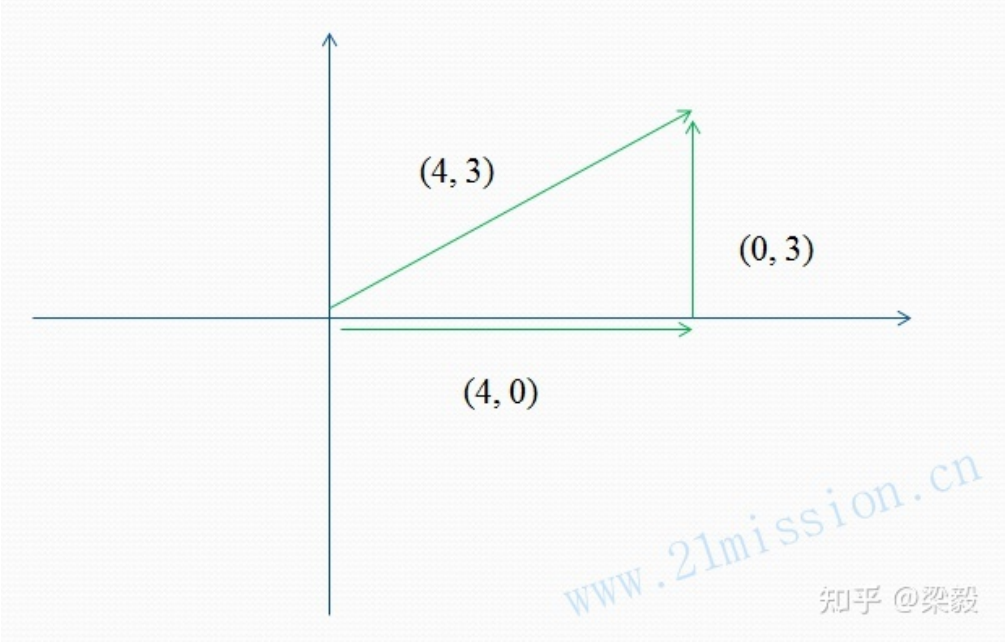


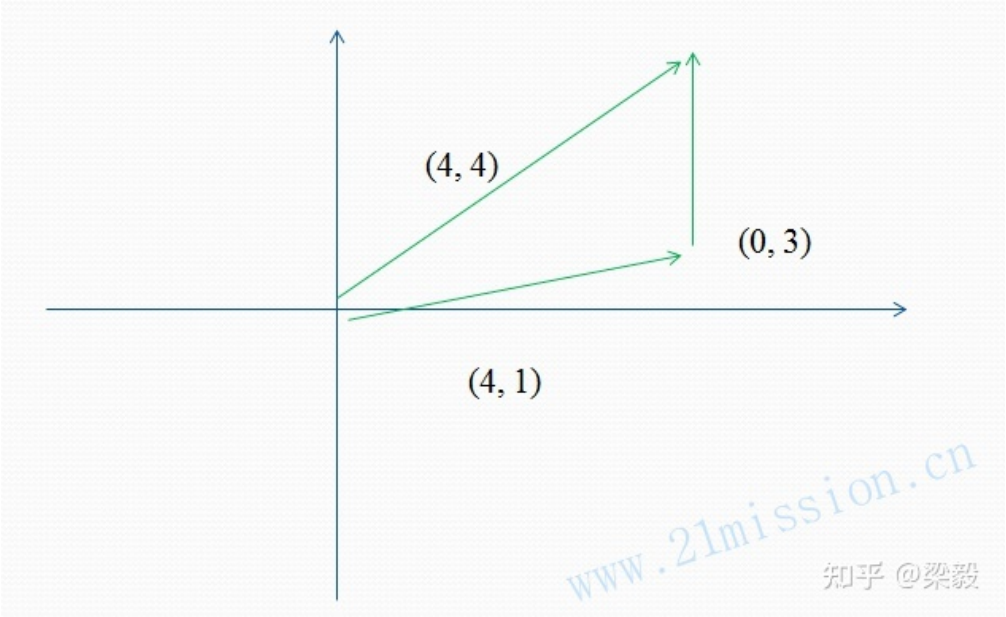




原理就是利用了向量相加等于正交的x轴和y轴的分量加和。可以利用矩阵 $\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$ 来表示，其中 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ 就是先增加横轴的基向量，$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ 就是后增加纵轴的基向量。然后矩阵相加，又因为向量表示为纵向的矩阵，所以自然得到纵向的坐标 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

以下解释矩阵相加



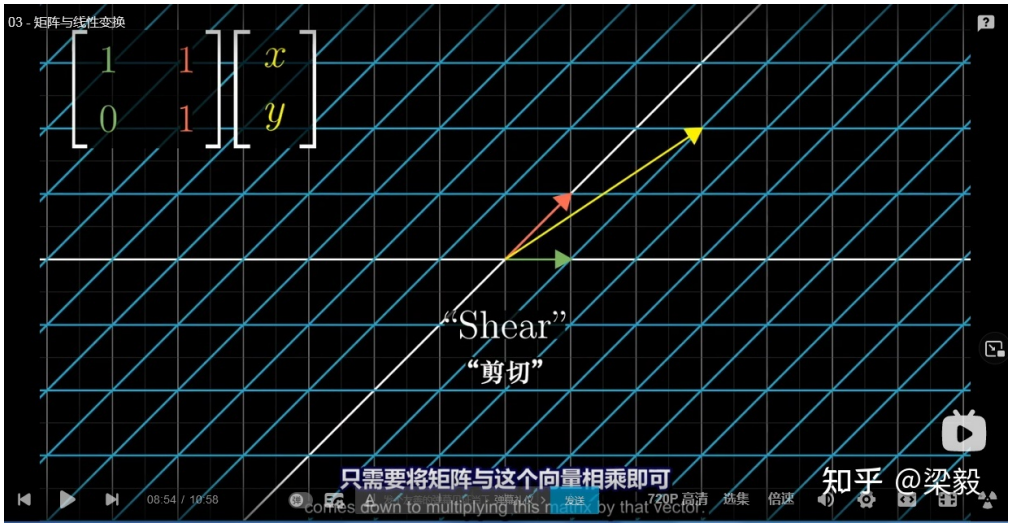


$$c_{ij} = a_i^{\tau} b_j = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

除了旋转，另一个比较重要的变换就是Shear（剪切）

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 对应原来x(1, 0)不变，y(0, 1)变成了(1, 1)

像平行四边形在高度不变的情况下，向右顺时针拉伸了。裁了左角粘贴在了右角。



矩阵相乘：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases}$$

从t1，t2到y1,y2的线性变换则

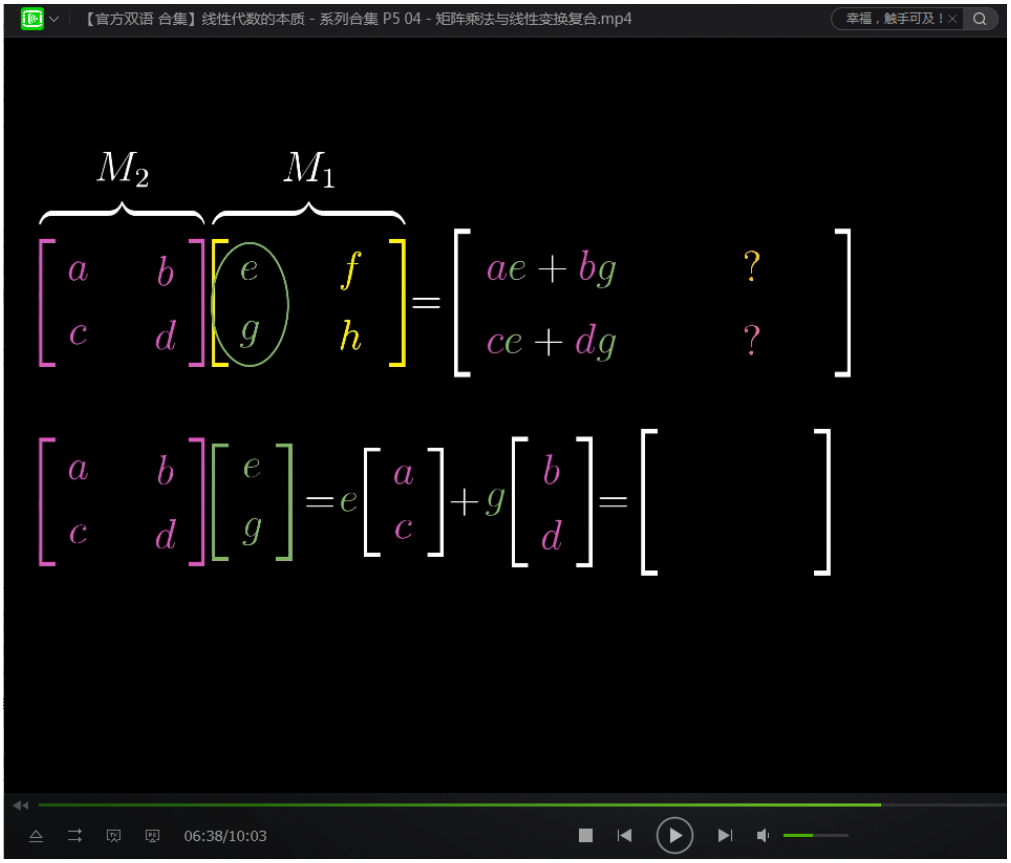
$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases}$$

即

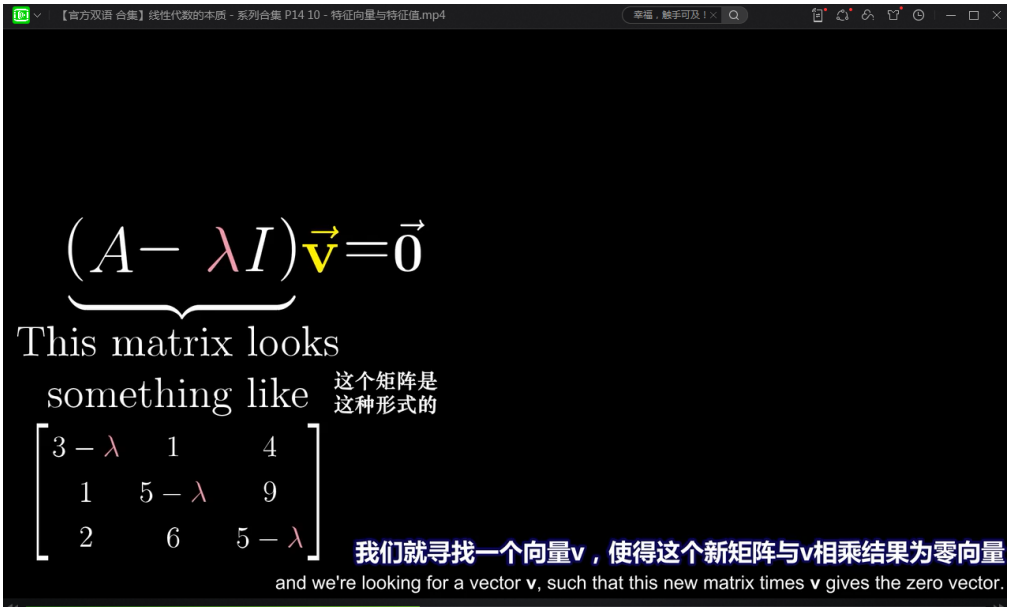
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

计算原则，从右向左依次左乘。也就是先将最右侧的矩阵、拆成列向量相加，然后去乘左边的矩阵。



4.5 特征向量



5 克莱姆法则背后的几何意义

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

矩阵变换求基。

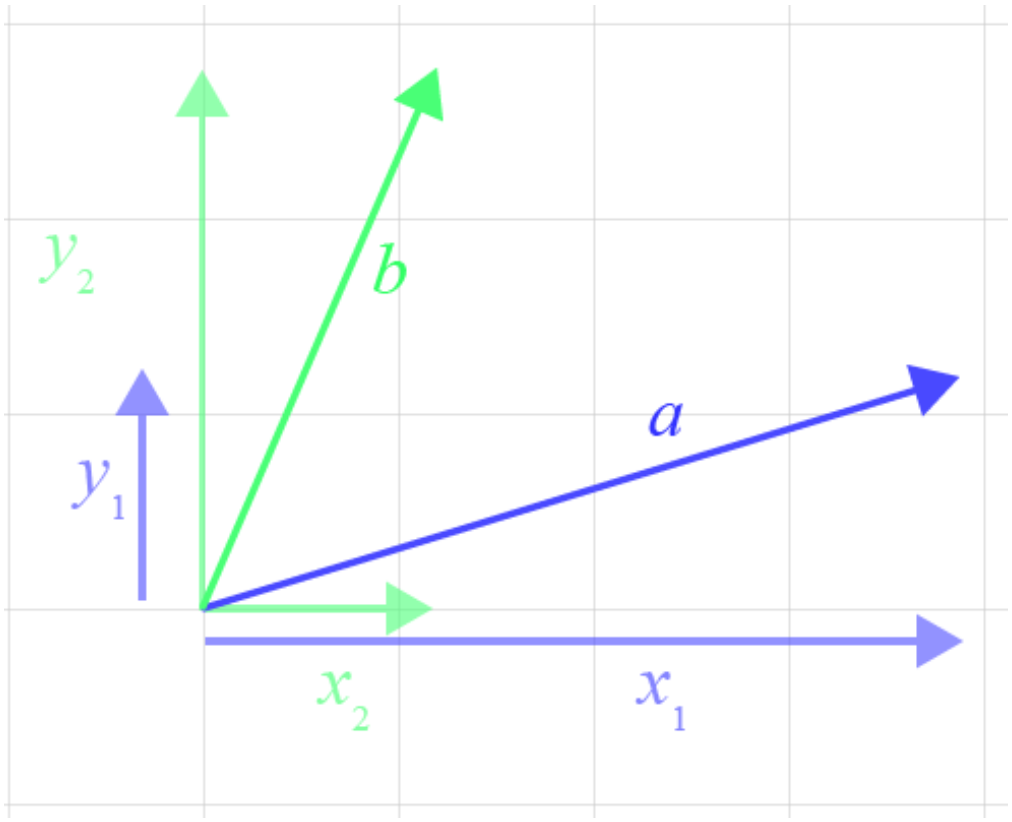
行列式不等于0意味着，线性变换后维数依然相同。否则就会降维。

5.1 点积

$\vec{a} = (x_1, y_1)$ 和 $\vec{b} = (x_2, y_2)$

则：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \tag{2}$$



或

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|cos\theta$, θ为向量a与向量b的夹角。$|a|$与$|b|$表示向量 a 与向量 b 的模长（即长度）。

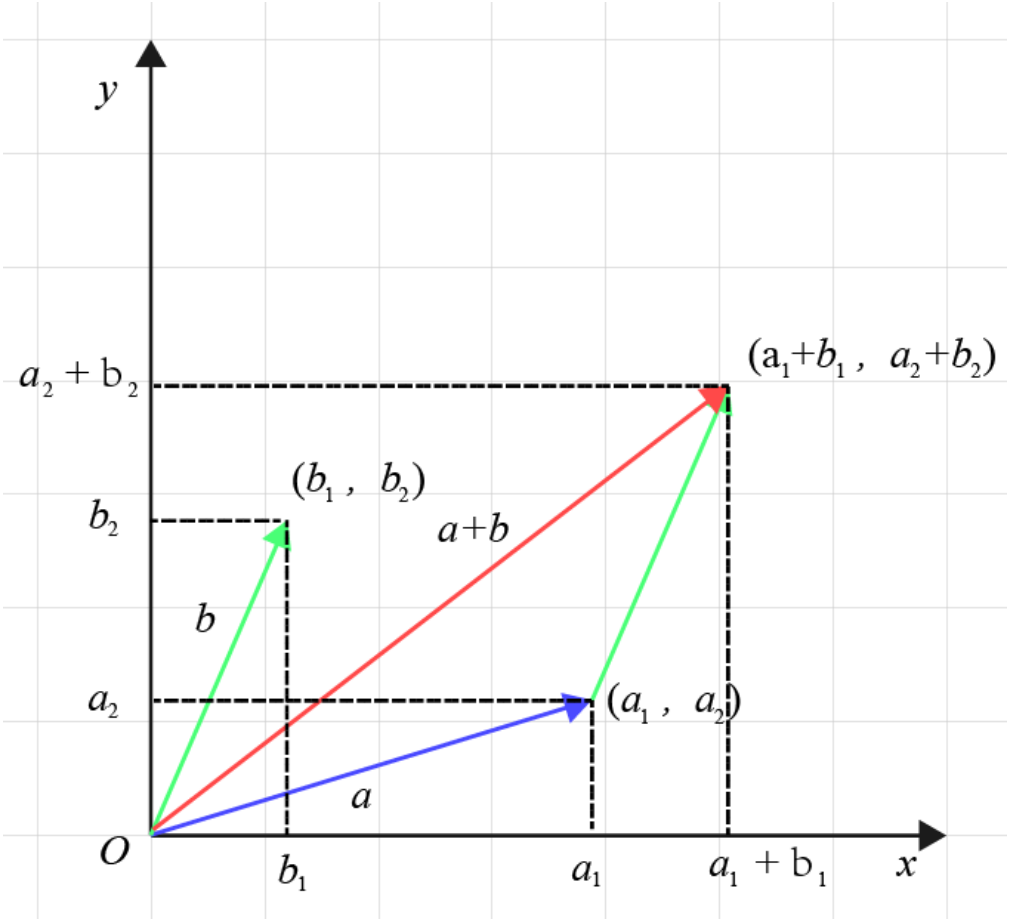
两个向量点积的结果，是一个数。点积运算，做了降维，把向量变成了一个数（这里的向量是二维的，数是一维的，由二维变成了一维）。

点积的作用：

1.可以判断两个向量是否垂直。（点积的意义是判断两个向量的夹角）

2.可以判断两个向量之间，是促进作用，还是抑制作用。

1. 锐角点积大于0.促进作用。
2. 钝角点积小于0.抑制作用。
3. 直角点积等于0.ab垂直。

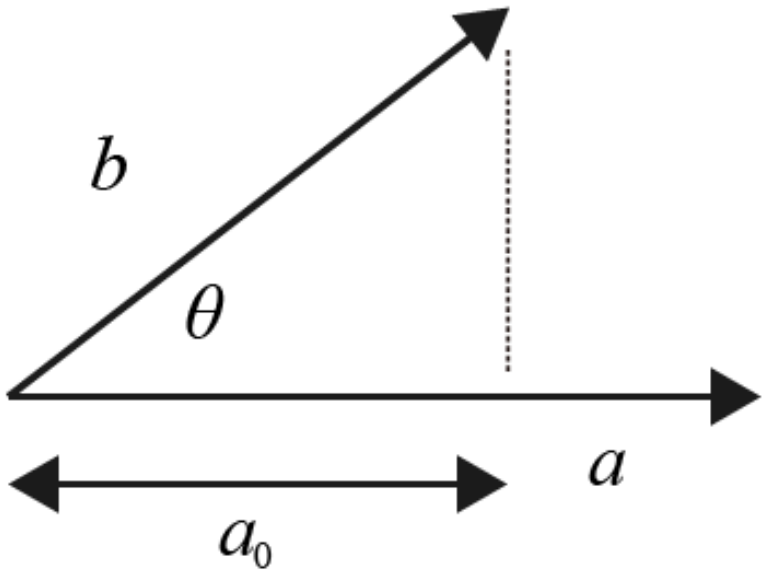


$\overrightarrow{a+b} = \vec{a} + \vec{b}$

3.可以做投影。（点积的意义是可以以两个向量中的任意一个作为单位基向量来求另一个向量在该向量上的分量。）

b向量向 a 向量做投影：

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|cos\theta$可得：$|b|cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a|}$



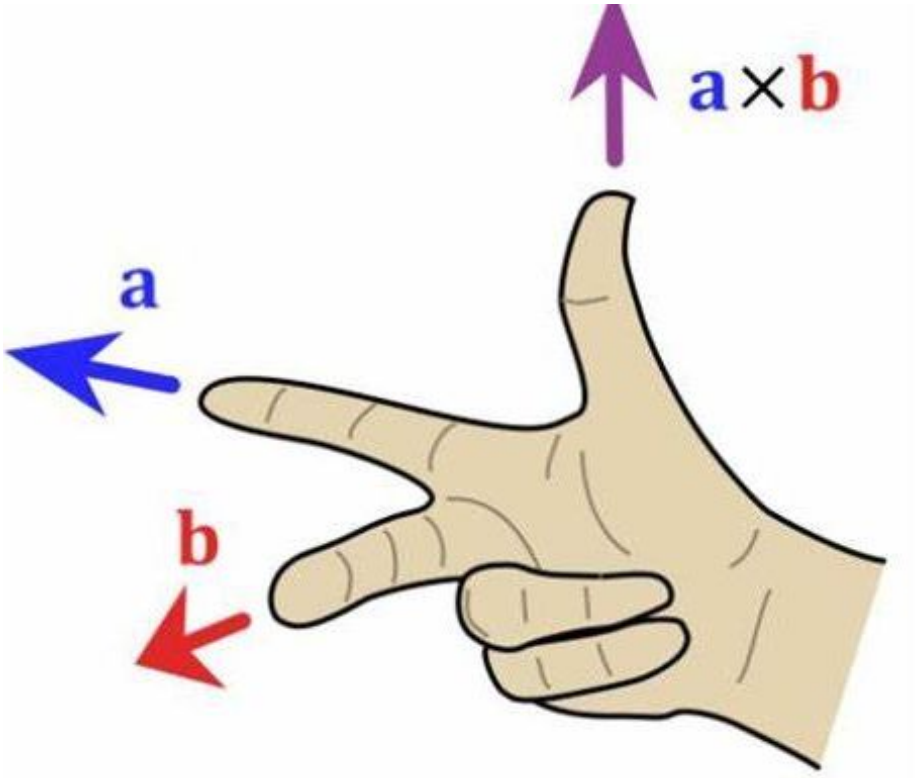
复杂点儿说：若$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$在直角坐标系下，那么有：
逆变分量$V^a=\overrightarrow{unit(a)}$
协变分量$V_a=\vec{c}\cdot\overrightarrow{unit(a)}$(方向在a，这里体现了点乘的含义)
同时反映了（2）式的原理。
$\vec{v}\cdot\vec{u}=v_iu^i=v^iu_i$
基矢之间的内积关系可以写作：
$\vec{g^i}\cdot\vec{g_i}=\delta^i_j$
协变坐标基和逆变坐标基是对偶关系。互为逆变坐标基。
旧基**X**下的度规 $\mathbf{G_X}$ 、新基**U**下的度规 $\mathbf{G_U}$ 满足关系式:
$\mathbf{G_U}=(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^T\mathbf{G_X}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}=(\mathbf{T})^T\mathbf{G_X}\mathbf{T}$
度规（二阶张量）的变换遵循“协变”规则。

5.2 叉积

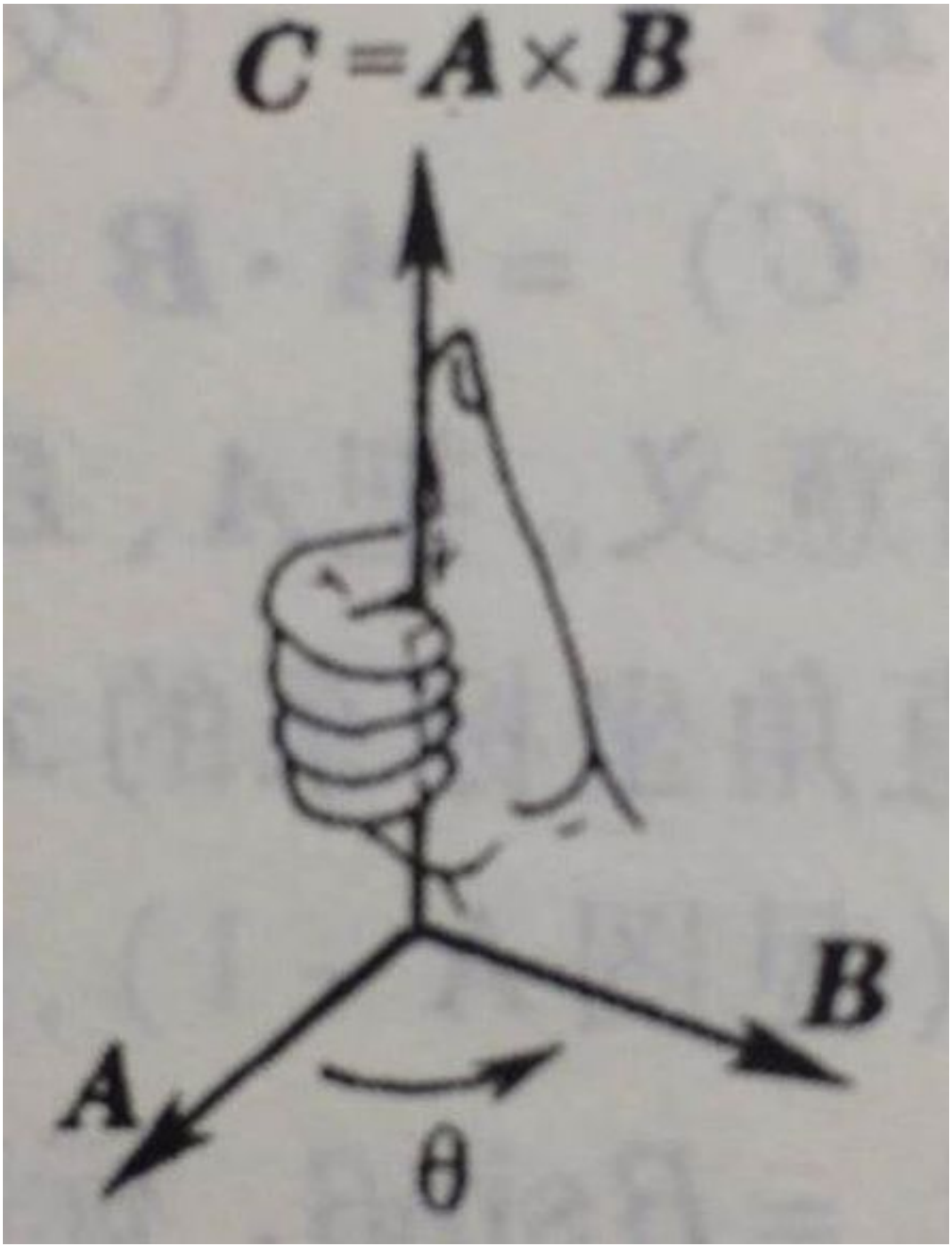
两个向量的叉积运算，可得到一个新的向量，记作向量 c .
$\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

向量积（叉积）的模长：（在这里 θ 表示两向量之间的夹角（共起点的前提下）（0°≤ θ ≤180°），它位于这两个矢量所定义的平面上。）
$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\theta$

向量 c 与向量 a 垂直的同时，也与向量 b 垂直。即向量 c 垂直于向量 a 与向量 b 所在的平面。其方向符合右手螺旋定则：

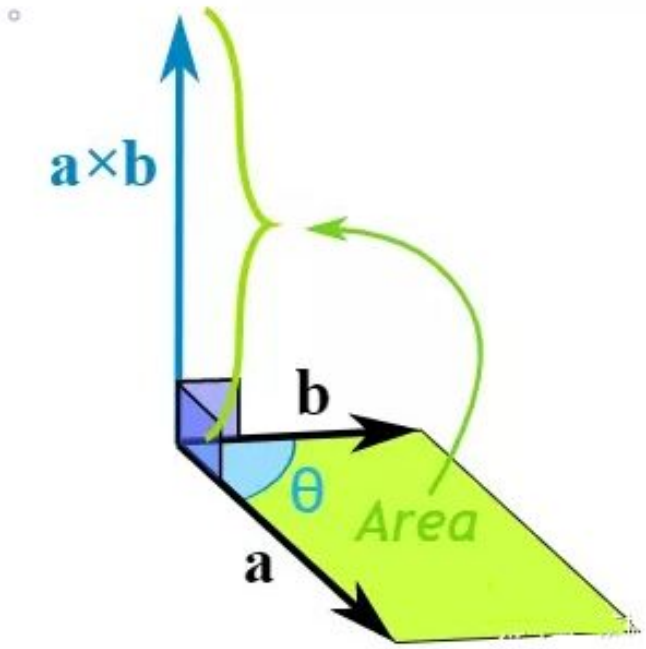


或者这种形式



其大小等于向量 a 与向量 b 所构成的平行四边形的面积

$$|\vec{c}| = |a||b|sin\theta$$

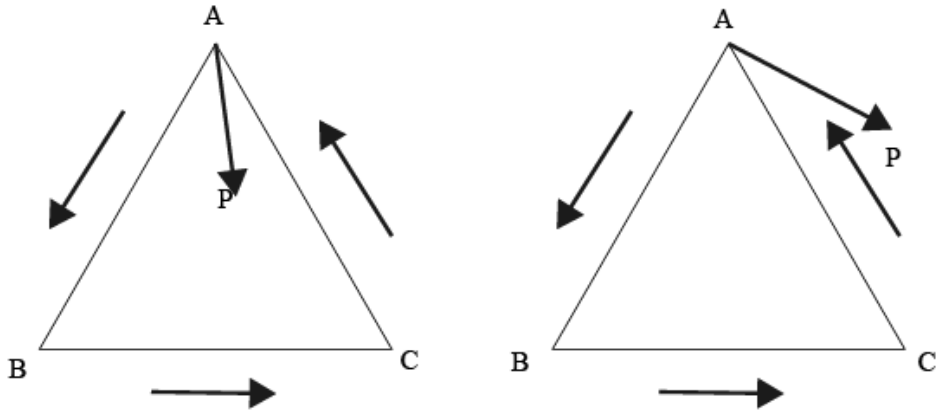


这里我们看到向量 a 与向量 b 的叉积结果，生成了一个新的向量 c，且垂直与 a 与 b 所构成的平面。叉积做了升维： a b c 三个向量，构成了一个三维的体系。

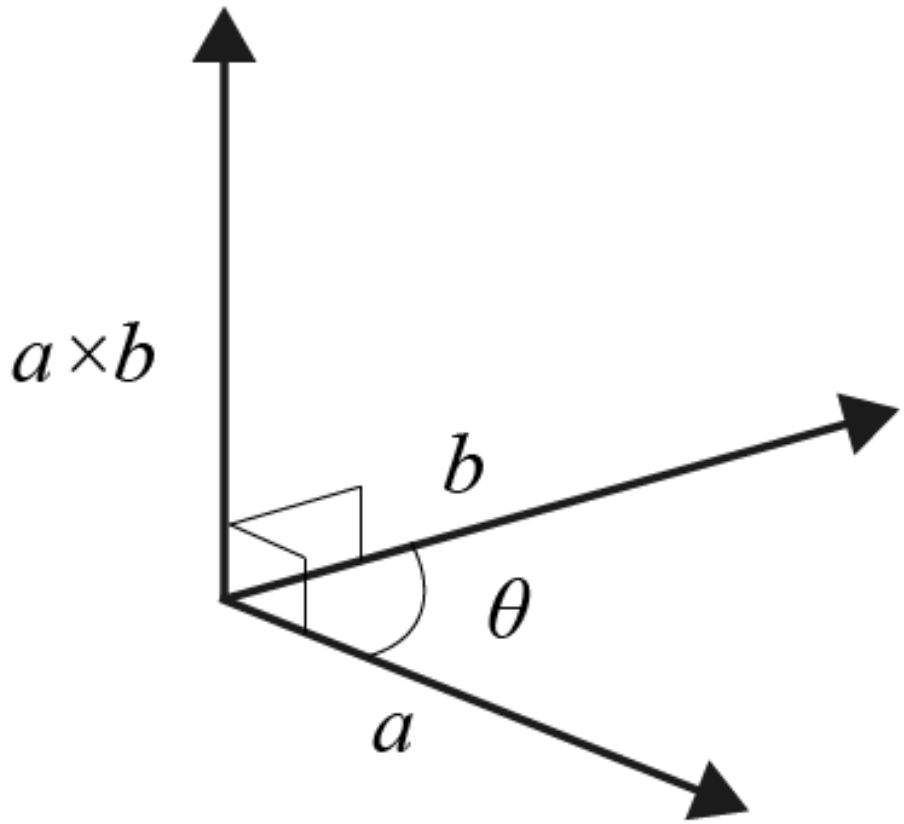
叉积的作用：建立三维的直角坐标系，判断两个向量的相对方位（左还是右），判断点是否在三角形内。

$\vec{P} \times \vec{Q}$

1. （P叉乘Q）$P \times Q > 0$说明P在Q的顺时针方向，$P \times Q < 0$说明P在Q的逆时针方向，$P \times Q = 0$说明P和Q共线。
2. 任一射线穿过多边形，奇数段位于多边形之内，偶数段位于多边形之外。



坐标运算：



设$a=(a_x,a_y,a_z),b=(b_x,b_y,b_z)$.i, j, k分别是X, Y, Z轴方向的单位向量，则：

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)i+(a_zb_x-a_xb_z)j+(a_xb_y-a_yb_x)k$，为了帮助记忆，利用三阶行列式，写成

$$\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2=det\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0\end{vmatrix}$$

即：

$$det\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{b}=(l,m,n)\times(o,p,q)=(mq-np,no-lq,lp-mo)$

用三阶行列式，写成

$$det\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ l & m & n\\ o & p & q\end{vmatrix}$$

证明：

为了更好地推导，我们需要加入三个轴对齐的单位向量i，j，k。

i，j，k满足以下特点：

$i=j\times k$；$j=k\times i$；$k=i\times j$；

$k \times j = -i$；$i \times k = -j$；$j \times i = -k$；

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$；（0是指0向量）

由此可知，i，j，k是三个相互垂直的向量。它们刚好可以构成一个坐标系。

这三个向量的特例就是i=（1，0，0）j=（0，1，0）k=（0，0，1）。

对于处于i，j，k构成的坐标系中的向量u，v我们可以如下表示：

u=Xu*i+Yu*j+Zu*k；

v=Xv*i+Yv*j+Zv*k；

那么

$$\begin{aligned} u \times v &= (X_u \cdot i + Y_u \cdot j + Z_u \cdot k) \times (X_v \cdot i + Y_v \cdot j + Z_v \cdot k) \\ &= X_u \cdot X_v \cdot (i \times i) + X_u \cdot Y_v \cdot (i \times j) + X_u \cdot Z_v \cdot (i \times k) \\ &+ Y_u \cdot X_v \cdot (j \times i) + Y_u \cdot Y_v \cdot (j \times j) + Y_u \cdot Z_v \cdot (j \times k) \\ &+ Z_u \cdot X_v \cdot (k \times i) + Z_u \cdot Y_v \cdot (k \times j) + Z_u \cdot Z_v \cdot (k \times k) \end{aligned}$$

由于上面的i，j，k三个向量的特点，所以，最后的结果可以简化为

$u \times v = (Y_u \cdot Z_v - Z_u \cdot Y_v) \cdot i + (Z_u \cdot X_v - X_u \cdot Z_v) \cdot j + (X_u \cdot Y_v - Y_u \cdot X_v) \cdot k.$

向量积（矢积）与数量积（标积）的区别

名称	标积/内积/数量积/点积	矢积/外积/向量积/叉积
运算式（a，b和c粗体字，表示向量）	$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cdot cos\theta$	a×b=c，其中$\|c\| = \|a\|\|b\| \cdot sin\theta$，c的方向遵守右手定则
几何意义	向量a在向量b方向上的投影与向量b的模的乘积	c是垂直a、b所在平面，且以$\|b\| \cdot sin\theta$为高、$\|a\|$为底的平行四边形的面积
运算结果的区别	标量（常用于物理）/数量（常用于数学）	矢量（常用于物理）/向量（常用于数学）

6 斜角坐标到直角坐标

如果基向量是方阵：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

对应x轴上的$\hat{i}$，y轴上的$\hat{j}$，

那么一个向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 经过旋转 $\begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

再经过数乘

$$\begin{bmatrix} k \cdot cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & k \cdot cos\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot cos\varphi \cdot x + (-sin\varphi \cdot y) \\ sin\varphi \cdot x + k \cdot cos\varphi \cdot y \end{pmatrix}$$

就得到新的斜角坐标下在原直角坐标下的对等平权的向量表示。

那么该项量在原来的直角坐标系下，终点到原点的距离的平方$(ds)^2$就是$x^2 + y^2$，而在斜角坐标系下，终点到原点的距离ds可以表示为：

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (k \cdot cos\varphi \cdot x + (-sin\varphi \cdot y))^2 + (sin\varphi \cdot x + k \cdot cos\varphi \cdot y)^2 \\ &= (kcos\varphi)^2 x^2 + 2kcos\varphi \cdot (-sin\varphi)xy + (-sin\varphi)^2 y^2 \\ &+ (sin\varphi)^2 x^2 + 2sin\varphi kcos\varphi xy + (kcos\varphi)^2 y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

而

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} k\cdot cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & k\cdot cos\varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k\cdot cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & k\cdot cos\varphi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k\cdot cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & k\cdot cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\cdot cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & k\cdot cos\varphi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (kcos\varphi)^2+(sin\varphi)^2 & kcos\varphi\cdot(-sin\varphi)+sin\varphi\cdot(kcos\varphi) \\ (-sin\varphi)\cdot(kcos\varphi)+kcos\varphi\cdot sin\varphi & (-sin\varphi)^2+(kcos\varphi)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

（4）式中的系数矩阵，

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{bmatrix}$$

两边加上边长

$$(x \quad y)\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y)\begin{bmatrix} g_{00}x+g_{01}y \\ g_{10}x+g_{11}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_{00}x+g_{01}y)x \\ (g_{10}x+g_{11}y)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{00}x^2+g_{01}xy \\ g_{10}xy+g_{11}y^2 \end{bmatrix}$$

就是（3）式中的系数。

6.1 正交对角化

把对称矩阵进行特征值分解：（也叫对称矩阵如何正交对角化）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2i \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}^{\text{纯旋转}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{纯拉伸}} \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}^{\text{纯旋转}}$$

对于上式，含义是，找出矩阵A的纯旋转单位正交矩阵。（包含了i-hat，j-hat的顺序旋转，以及i、j的翻转顺序的旋转、其中旋转时两个hat间的夹角是可以变化的。）那么最右侧的矩阵含义是：在特征向量的基础上；中间矩阵的含义是：拉伸；左侧矩阵的含义是：再反方向旋转回去。就得到一个标准型。标准型就是大小不变，但是方向很正。

计算上有个取巧的办法：若$A = P\Lambda P^{-1}$，则$A^n = P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdots = P\Lambda^n P^{-1}$，其中$\Lambda$为对角矩阵。利用的就是相似变换，也就是转换成对角矩阵（相似矩阵的一种）之后进行计算，注意这里的P可以不是单位正交阵。但是A一定是有两个特征向量的维度才行。否则

左乘是线性变换，那么方程两边同时右乘B矩阵，就相当于对B矩阵进行相等的不同形式的两种线性变换，如：

$AP = PD$

$APP^{-1} = PDP^{-1}$

$APE = PDP^{-1}$

$AP = PDP^{-1}$也就是$A \sim D$，A和D相似。

求二阶矩阵的逆矩阵

求二阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$的逆矩阵.

解： $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,\ A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

其中A_{ji}代表各元素的代数余子式，注意看伴随矩阵的代数余子式是转置的元素序号。

利用逆矩阵公式：

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，当$|A| \neq 0$时，有

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

以下是分解过程：

矩阵A由两个二维向量张成向量空间，矩阵A乘以一个向量，等于将这个向量线性变换到A张成的新的空间。在这个变换过程中，站在特征向量上的向量将继续待在特征向量的方向上。一般来说“张成”这个词是两个向量确立的平面。但是用延续、发展的眼光看，两个三维向量可以张成一个面、三个三维向量就能张成三维的整个空间。而往下、或者说往回看，一个二维向量张成的空间就是一根线。一个三维向量张成的空间也是一根线。

简单说，一个向量有方向和长度。这个方向分成两个分量就是二维向量、这个方向也能分成三个分量，就是三维向量。两个向量可以张成一个平面。三个向量干得好就可以最大张成（撑出）一个三维体。倒回去看，那么一个向量，能够伸缩张成一条直线。而线性组合产生的向量的长度的平方，就等于组合它的那些向量的长度的点积。

两个三维向量张成的向量空间是过圆心的一个平面。

两个向量可以张成一个二阶的张量。此时这两个向量的逆变分量和协变分量的排列组合，就构成三种张量的表现形式。同理，三个向量可以张成一个三阶的张量。这两个向量存在与三维空间中。那么二阶张量就是一个3*3的矩阵。三阶张量就是一个3*3*3的矩阵体，如图1。

矩阵A的特征多项式为 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda)$

所以A的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.通过标准计算可得到每个特征空间的一个基：

当$\lambda_1 = 1$时，对应的特征向量应满足

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得$x_1 = x_2$,所以对应的特征向量可取为

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

当$\lambda_2 = 3$时，对应的特征向量应满足

$$\begin{bmatrix} 2-3 & -1 \\ -1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

解得$x_1=-x_2$,所以对应的特征向量可取为

$$p_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

显然，若p_i是矩阵A的对应于特征值λ_i的特征向量，则$kp_i(k\neq 0)$也是对应于λ_i的特征向量。

$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 3\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

这两个向量形成秩为2的一个基；也即正交基。 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,但是这个基并不是单位向量，用它坐旋转会有拉伸作用。而我们要求所有拉伸作用，都体现在变化矩阵 $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$上，

单位正交基对计算将会有用。所以化为单位形式，将hat不为0的按系数平方相加再开放，可得分母。系数为分子。进行单位化。得到单位特征向量：

$$P=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

那么有： $A=PDP^{-1}$.由于P是方阵且有单位正交列，所以P是一个正交矩阵，而$P^{-1}=P^T$.

6.2 单位正交转置矩阵与逆矩阵相等

为什么正交矩阵的转置矩阵与逆矩阵相等？

证明：两个向量如果正交，那么相乘为0.

$$[1,0,0]\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=0+0+0=0$$

若列向量 $\vec{p}=\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_n\end{bmatrix}$

那么其对应的行向量为 $\vec{p}^T=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$

我们用黑体小写字母来代表列向量，则$\vec{p}=\boldsymbol{p}$，行向量则表示为：$\vec{p}^T=\boldsymbol{p}^T$

矩阵A表示为： $A=[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n]$

其转置矩阵则为： $A^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n\end{bmatrix}$

矩阵A左乘其转置矩阵A^T:

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1^T \cdot \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_1^T \cdot \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_1^T \cdot \boldsymbol{p}_n \\ \boldsymbol{p}_2^T \cdot \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2^T \cdot \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_2^T \cdot \boldsymbol{p}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{p}_n^T \cdot \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_n^T \cdot \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n^T \cdot \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\boldsymbol{p}_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{p}_2|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{p}_n|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

而已知$A^{-1} \cdot A = E$(E代表单位矩阵)，所以可得，对于单位正交方阵A有：

$$A^T = A^{-1} \tag{5}$$

6.2.1 有什么意义

单位正交矩阵$P = \begin{bmatrix} i_x & j_x \\ i_y & j_y \end{bmatrix}$的转置矩阵$P^T$是 $\begin{bmatrix} i_x & i_x \\ j_y & j_y \end{bmatrix}$

它的逆矩阵和转置矩阵相等，瞬间可得P^{-1}。是 $\begin{bmatrix} i_x & i_x \\ j_y & j_y \end{bmatrix}$

举例：$\begin{bmatrix} i_x & j_x \\ i_y & j_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$令$\varphi = \frac{\pi}{3}$ 矩阵得数：$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$转置后 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

一个是逆时针旋转30°，一个是顺时针旋转30°.正好互逆。

用一个逆时针的单位正交阵做基底，用对角矩阵拉伸，然后再旋转回来，得到的不正是一个标准二次型吗!!!

通过观察列向量的i-hat固定x轴不变，j-hat固定y轴不变，因为正交，所以对调i-hat的y与j-hat的x，正好就是反向旋转。

对角矩阵（diagonal matrix）diag= $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$代表只有拉伸，对角矩阵的所有基向量都是特征向量。矩阵的对角元是它们所属的特征值。

而对角矩阵两边的P和P^{-1}则只有旋转。

7 对比数乘、加法

7.1 行列式（determinant）决定性的（面积）

7.1.1 数乘

1、divided by 除以，例如：10 divided by 2 is 5.（10除以2得5。）

2、divides into 被整除，例如：7 divides into 14. （14 能被 7 整除。）

3、over 除以，例如：3÷5 ，读作 three over five。

在《牛津词典》上查divide这个单词的时候看到这样两个句子：

30 divided by 6 is 5. 30除以6等于5。

5 divides into 30 6 times. 用5除30等于6。

数学表达中，5 divides into 30. divides在这里为不及物动词，与into构成短语动词divide into, 我们知道除法是减法的简化运算。5 divides into 30.是个完整的句子。意为：从30中每次减去5，不留余数。翻译为汉语就是5除30可以除尽。5 divides 30 6times. 也是完整的句子，不过多了一个状态6 times。意为从30中每次减去5，六次减完。翻译为汉语就是5除30等于6。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \div k} k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7.1.2 相加

$$\text{若 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7.2 矩阵

7.2.1 数乘

$$\lambda \mathbf{A} = \mathbf{A} \lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.2.2 相加

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵相加就是各个元素相加，但是由于维度参数是以列向量的形式书写，所以拆分列系数矩阵的时候就成了行相加。太美了！

(1)式扩展

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} e \\ f \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + dy + gz \\ bx + ey + hz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix} \tag{6}$$

8 如何用线性代数来揉一个面团

建立坐标系可以使空间中的点与实向量一一对应的。这使得一个实二次方程$ax^2 + bxy + cy^2 = d$对应一个相应的图像，这里不考虑x轴、y轴上的平移，所以没有ex、fy这两项。方程中的每一对儿（x，y）都对应坐标系上的一个向量。

反过来，给定一个图像后，随着坐标系的变化，图像的方程也会随之改变。如果椭圆不变，那么变换坐标系就相当于基变换。

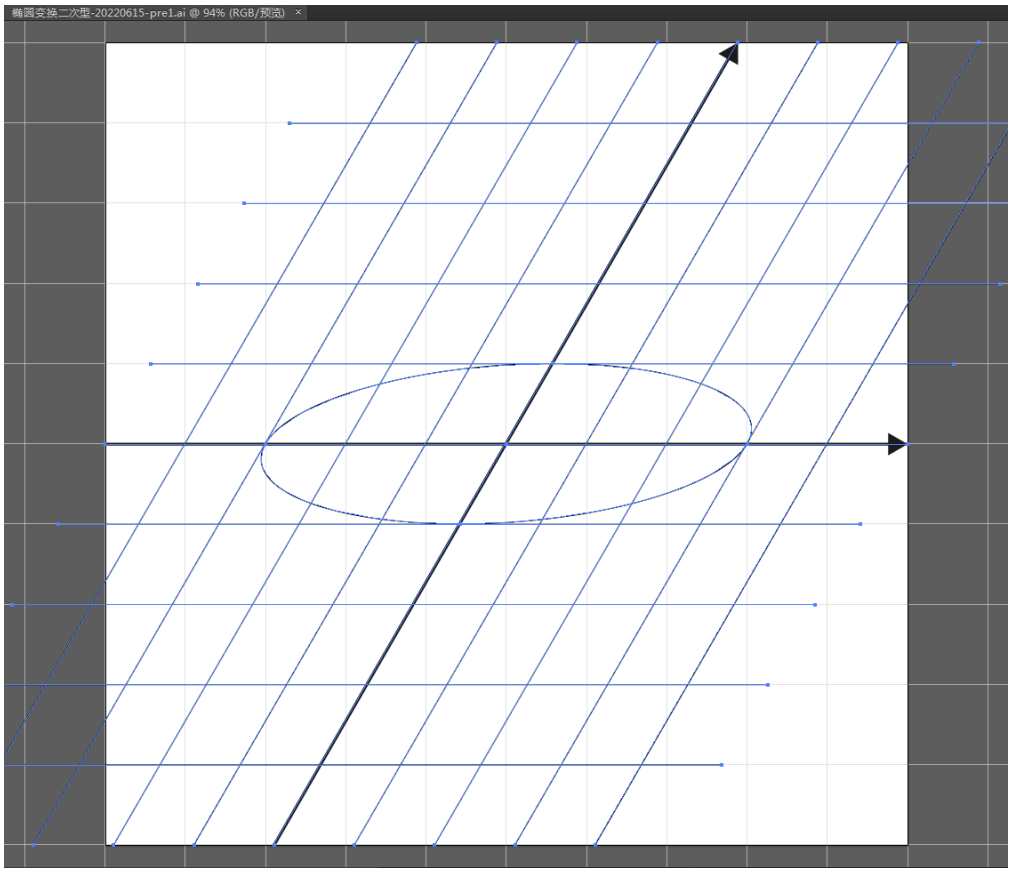
椭圆的标准方程： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

坐标面平行平面所截曲线： $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$

其中a为长/短轴顶点、对应b为短/长轴顶点。

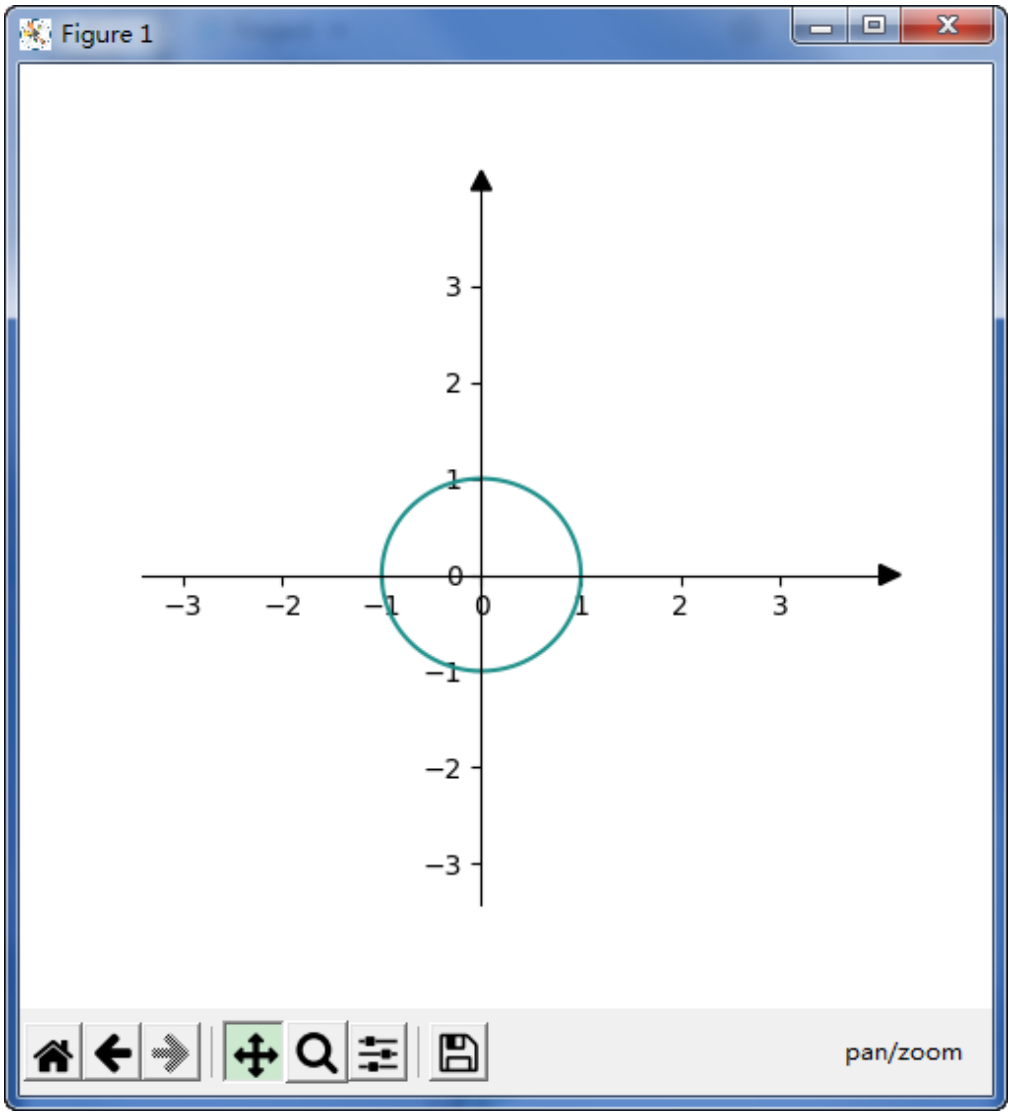
椭圆面积公式： $S = \pi ab$

比如在直角坐标系下画一个正椭圆，然后进行基变换，然后站在新的基的直角坐标系视角下，就会看见椭圆发生了改变。下图为倾斜30度。相当于剪贴变换。



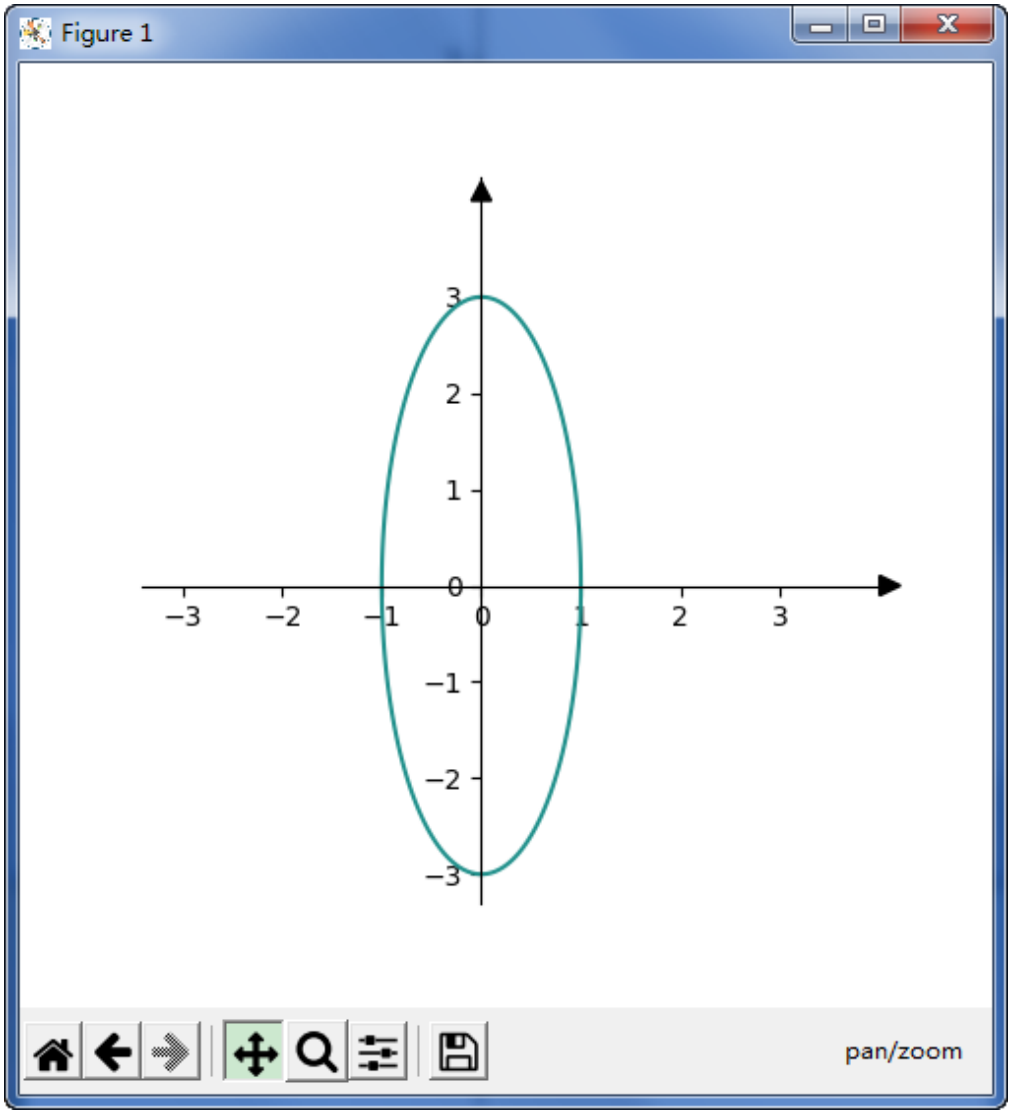
首先我们画一个圆：

$$(x \quad y)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = x^2 + 0xy + 0yx + y^2 = 1$$



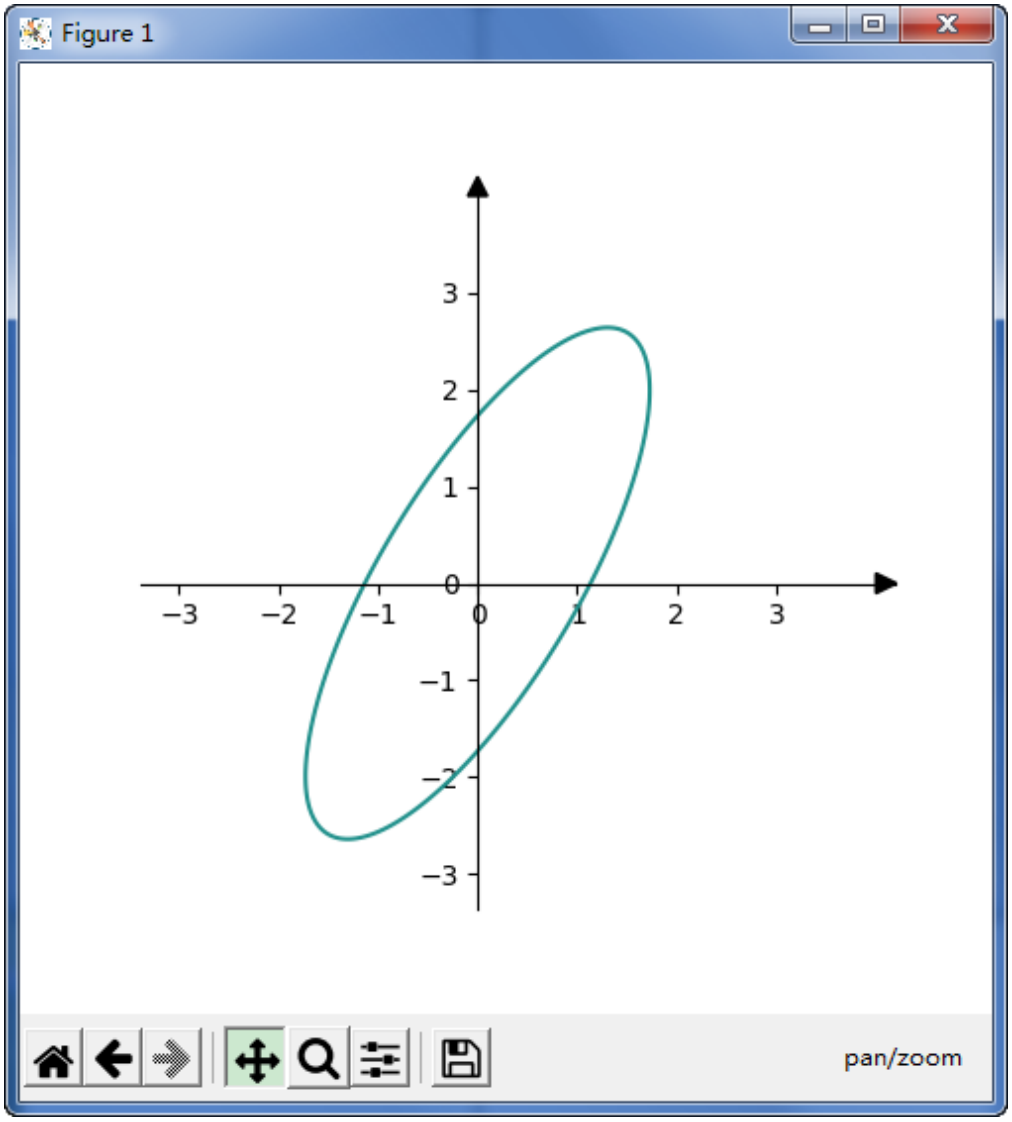
然后我们拉伸它

$$(x \quad y)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = 9$$

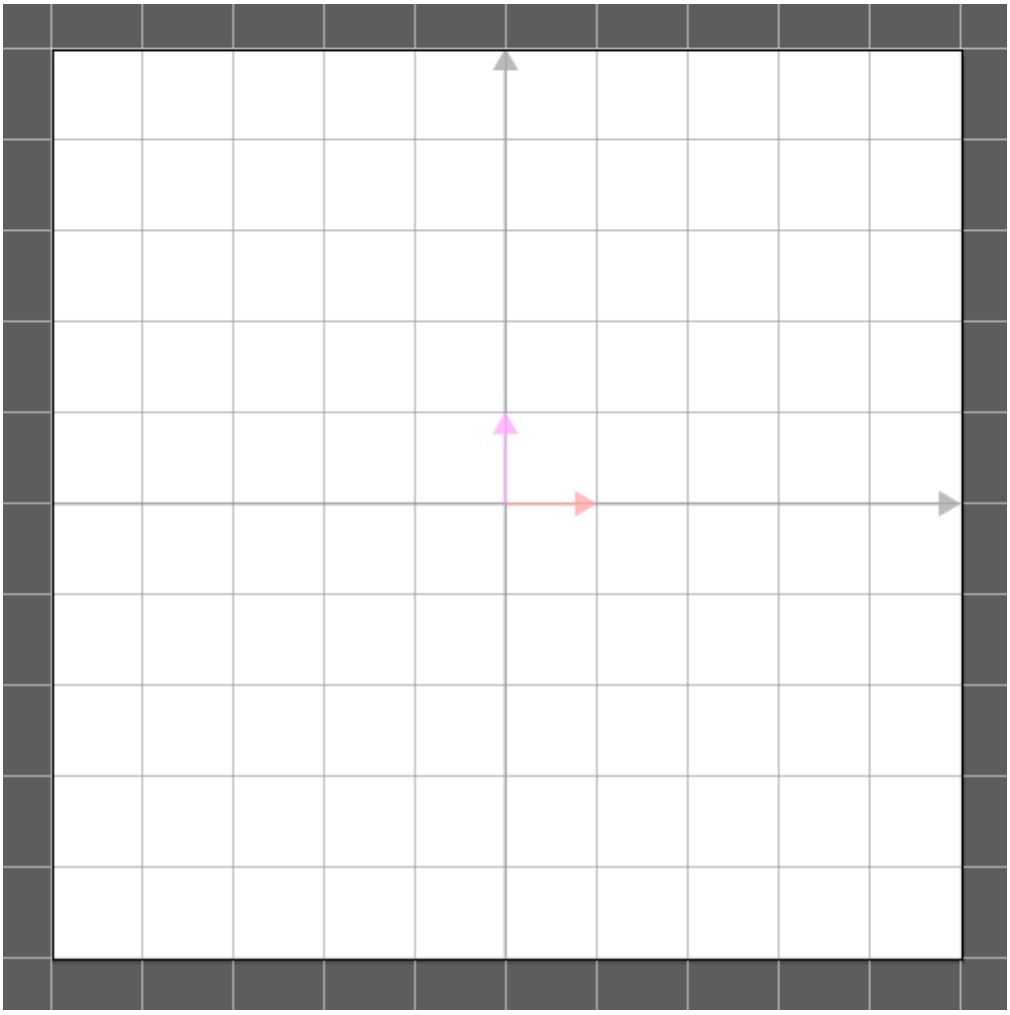


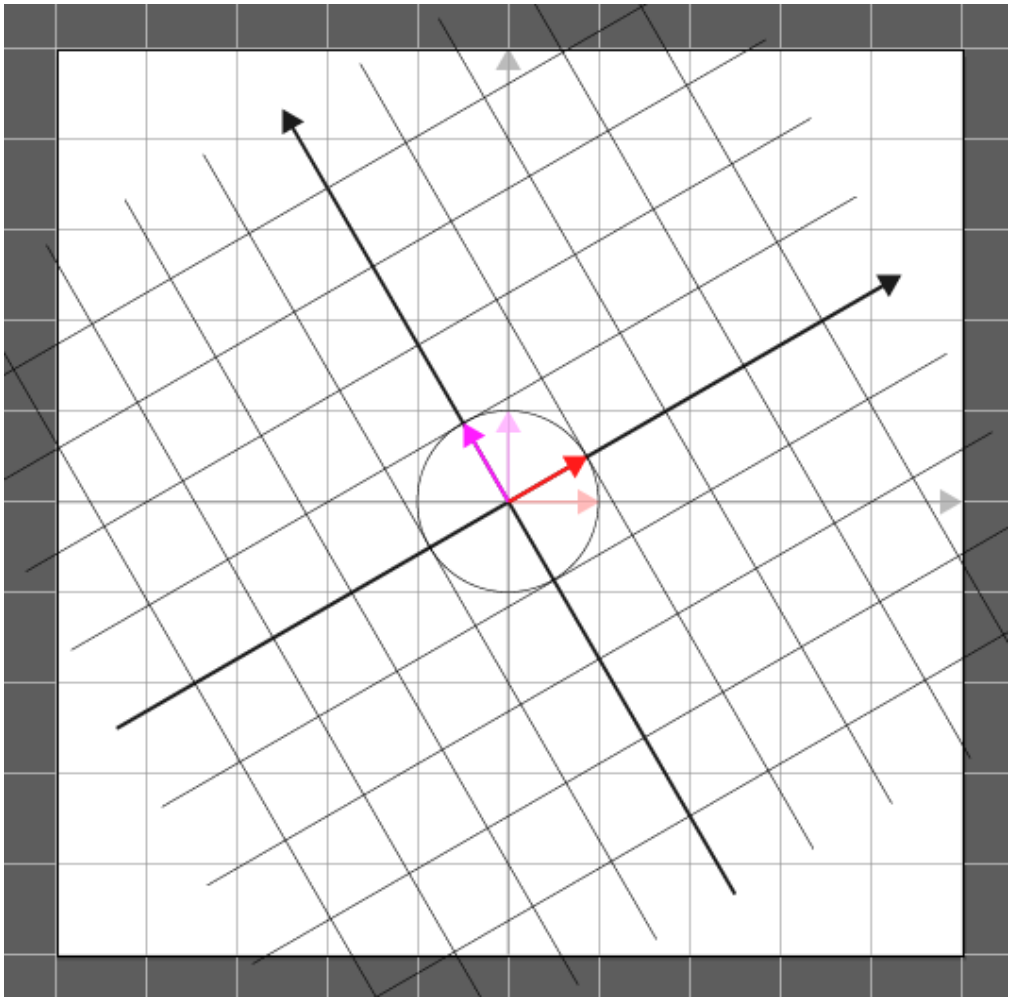
然后我们旋转它(在一个旋转基的基础上，拉伸，然后再旋转回来（左乘逆矩阵（即单位正交基的转置）)，等于站在新基（变换矩阵中的单位矩阵）的角度看椭圆)

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} cos(30°) & sin(30°) \\ -sin(30°) & cos(30°) \end{bmatrix}}_{③} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{②} \underbrace{\begin{bmatrix} cos(30°) & -sin(30°) \\ sin(30°) & cos(30°) \end{bmatrix}}_{①} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9$$

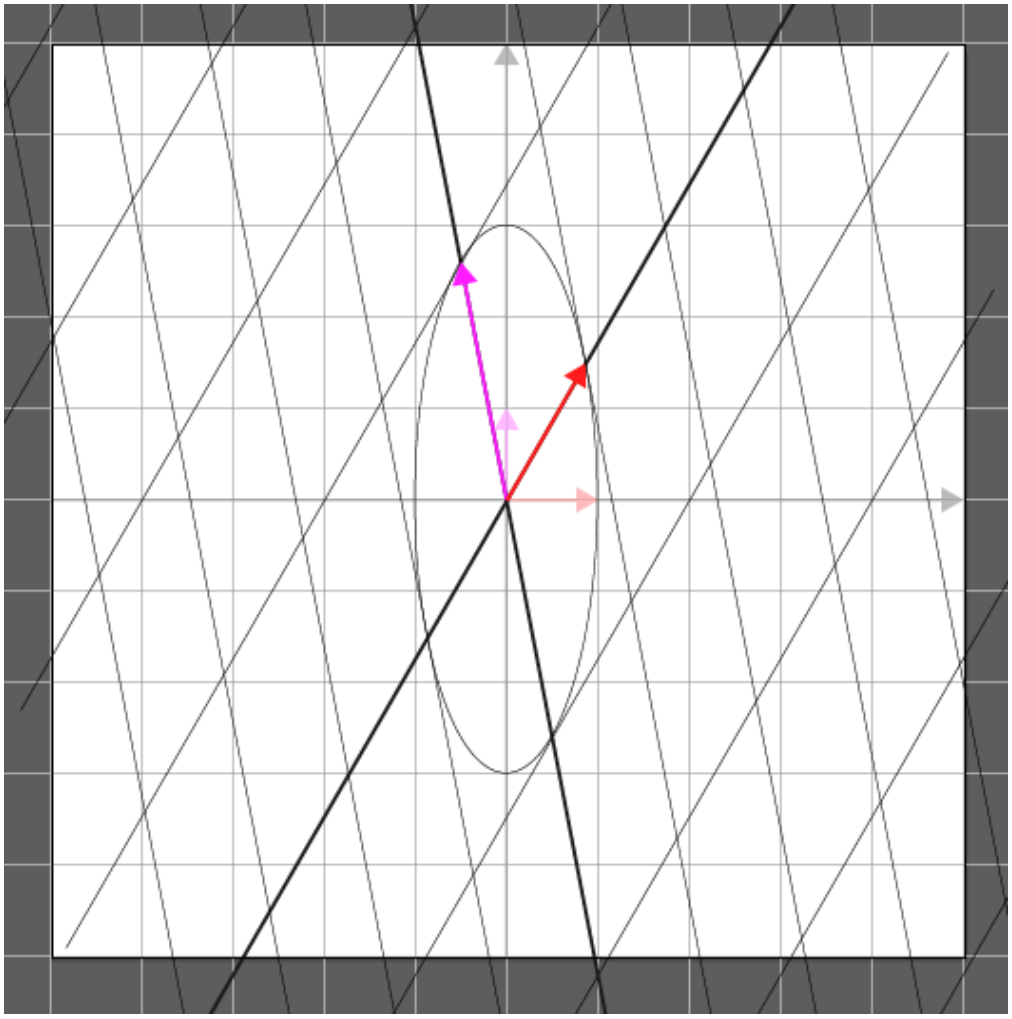


第①步：

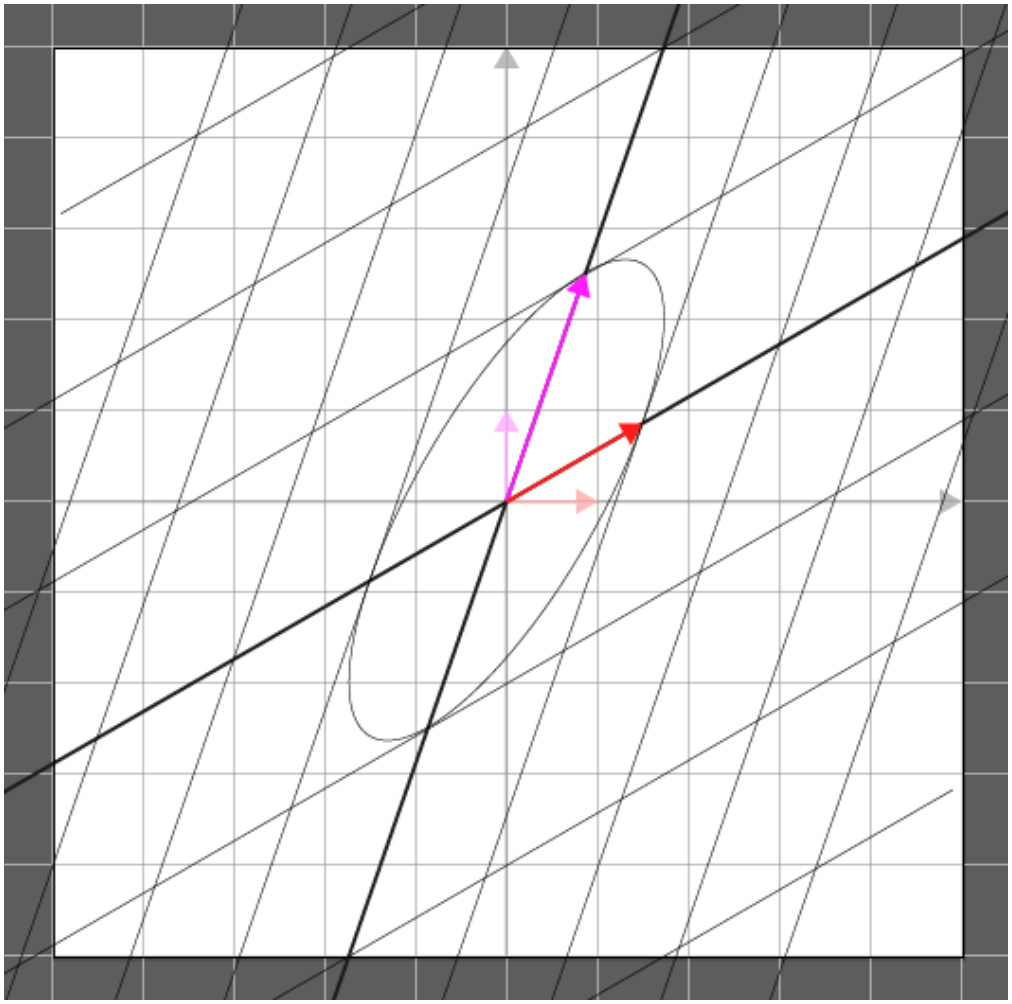




第②步：



第③步：



8.1 基变换

变换的叠加就是把以前所有的结果看做右项，然后以单位正交基铺进结果。左乘这个新的正交基。进行新的线性变换。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} cos(\varphi) & sin(\varphi) \\ -sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{bmatrix}}_{③} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{②} \underbrace{\begin{bmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{bmatrix}}_{①} \vec{v}$$

①是基变换的矩阵（基阵的变换），③是基变换的逆变换，这里由于利用了三角函数，实际上是单位化了基矩阵，所以转置矩阵就可以轻易得到逆矩阵。而②代表了我们看到的线性变换矩阵。

下面是具体的视角转换过程。

$\vec{v}$是詹妮弗的语言描述的向量。

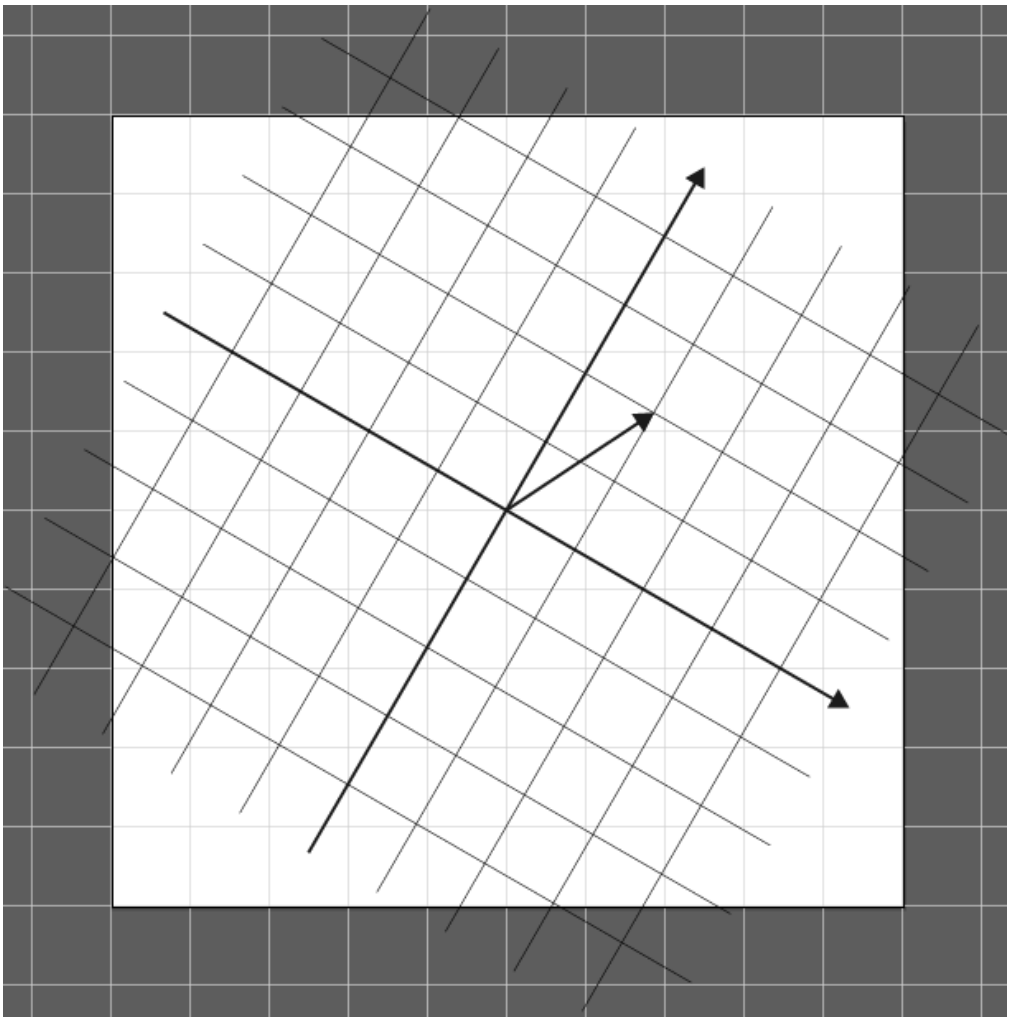
①$\vec{v}$是基变换后，转化成了我们的语言描述的同一个向量。其中①这个矩阵就是用我们的语言描述的她的基向量的线性变换矩阵。

②①$\vec{v}$是用我们的语言描述的变换后的向量。其中②这个矩阵是我们的语言描述的线性变换矩阵。

③②①$\vec{v}$是用詹妮弗的语言描述的变换后的向量。其中②这个矩阵是基变换矩阵的逆矩阵。

左面三个矩阵的复合，就是一个叠加变换矩阵。对应的是詹妮弗语言描述的线性变换矩阵。

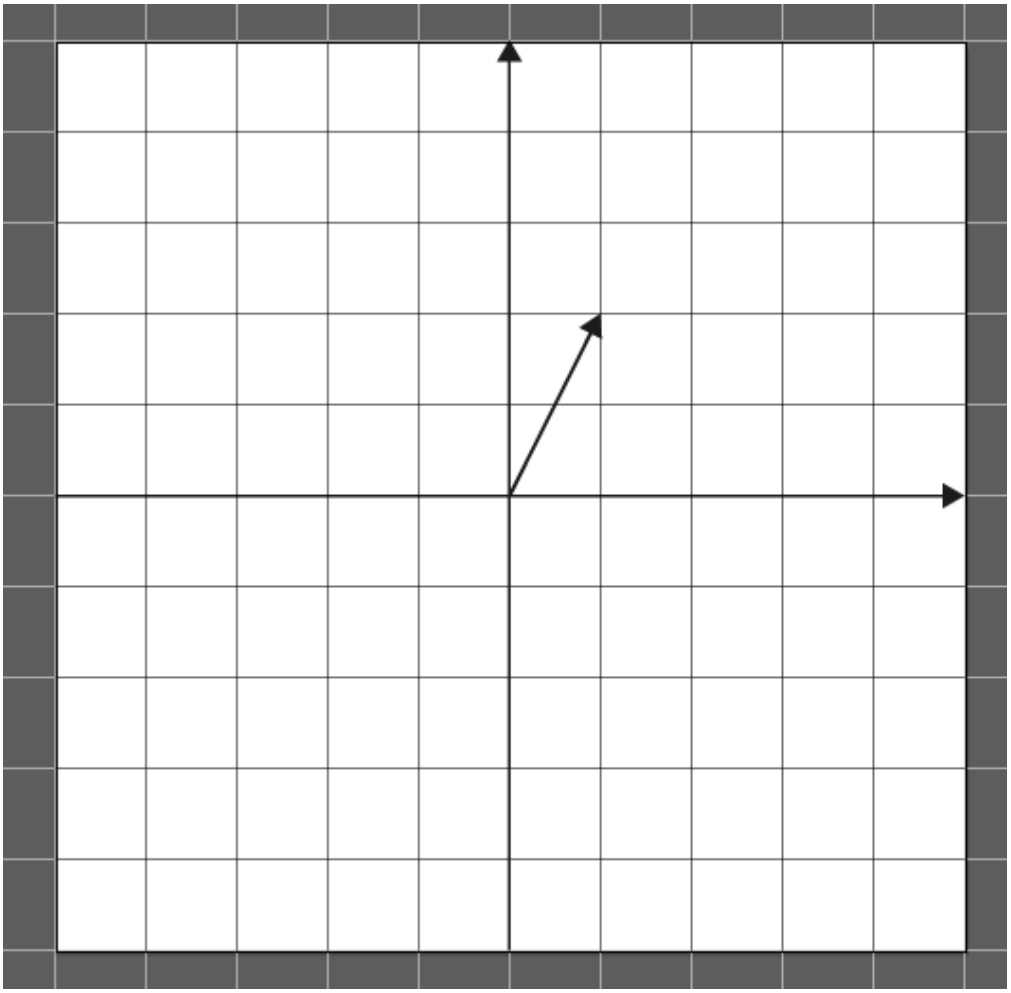
举个栗子：现有一个詹妮弗眼中的向量 $\vec{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$



首先通过一系列变换换算成我们眼中的 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ，

这里我们需要逆时针旋转30°.即基变换是 ① $=\begin{bmatrix}cos30^\circ & -sin30^\circ\\ sin30^\circ & cos30^\circ\end{bmatrix}$

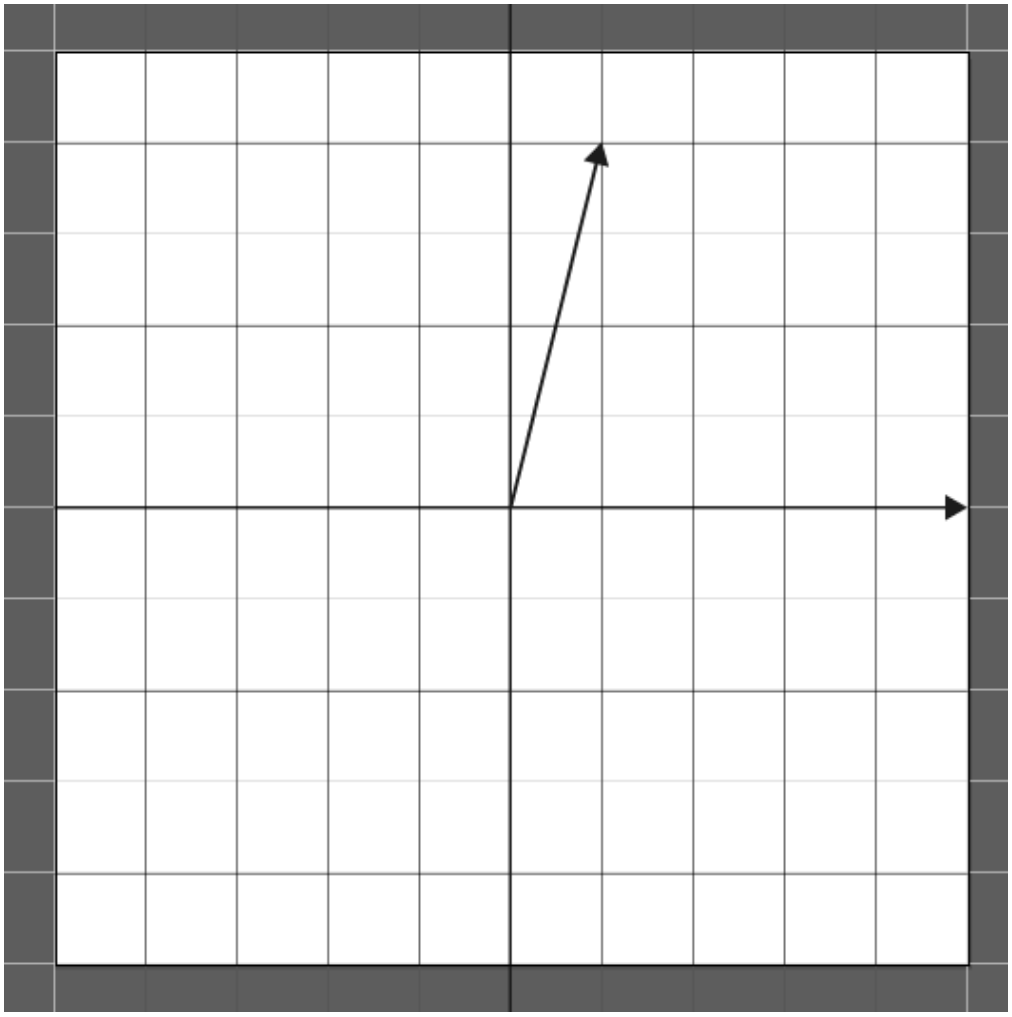
那么詹妮弗以后给的其他向量，我们都可以按照①$\vec{v}$进行转换。基矩阵相当于解密矩阵。



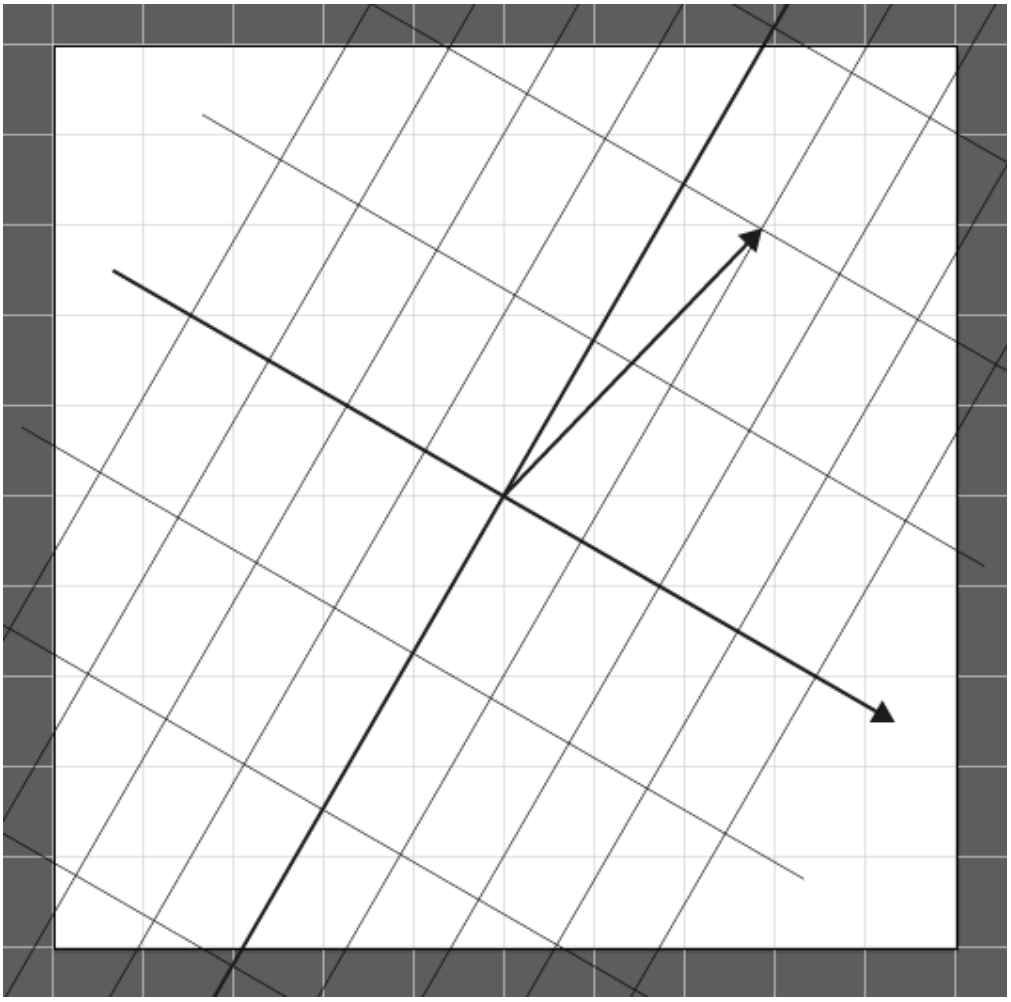
转换之后我们就可以利用我们的知识进行计算。比如根据我们的计算在我们看到的$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$需要扩张成原来的2倍。

$\textcircled{2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

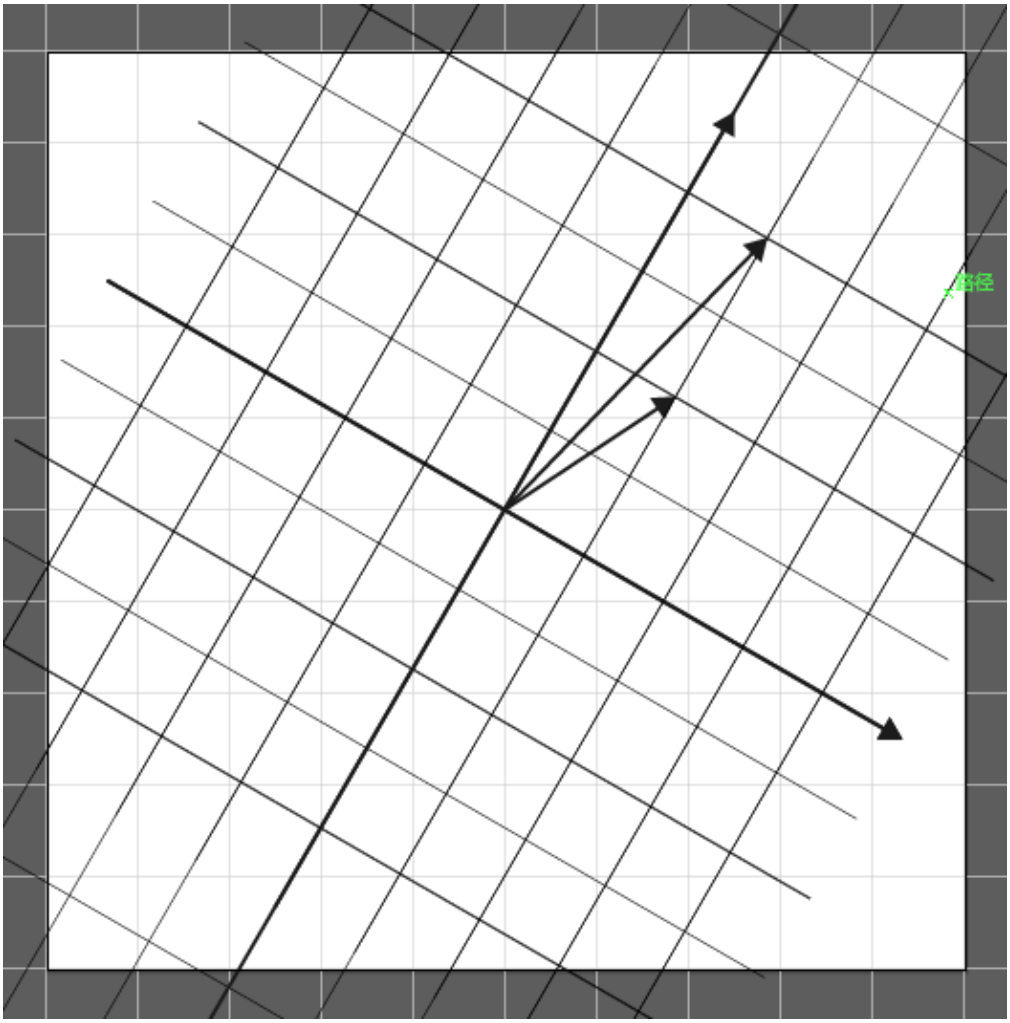
那么$\textcircled{2}\textcircled{1}\vec{v}$



把这套方案转换给詹妮弗，则需要逆转成詹妮弗的坐标系，基矩阵的逆矩阵相当于加密矩阵，③②①$_{\vec{v}}$:



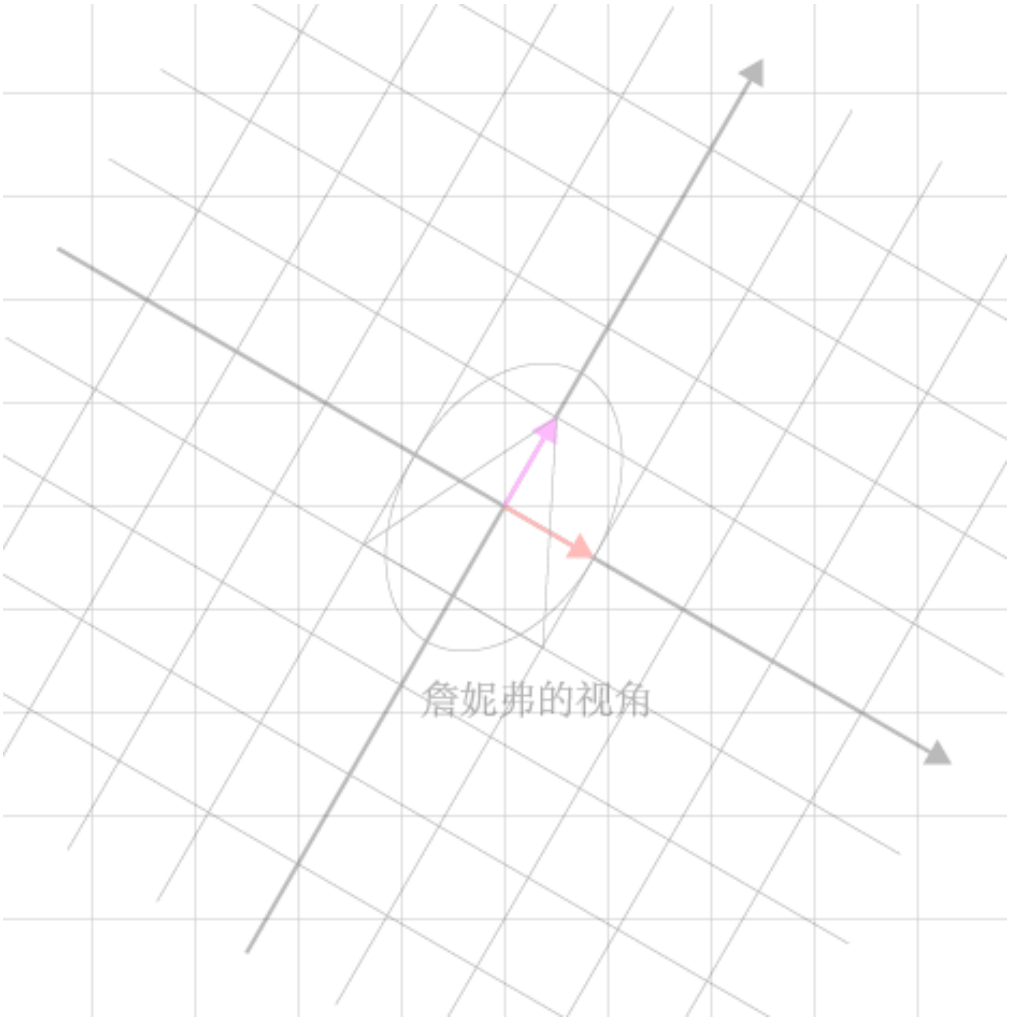
最后詹妮弗根据我们的线性变换方案③②①加上自己坐标系内的任意向量$\vec{v}$，就可以同步执行我们眼中的作战方案了。比如我们得到了詹妮弗（车）同样坐标系下运动的单兵，传来消息说前方4格有敌人。那么我们在说车5进4，那么詹妮弗执行车5进4，就能杀到敌人。



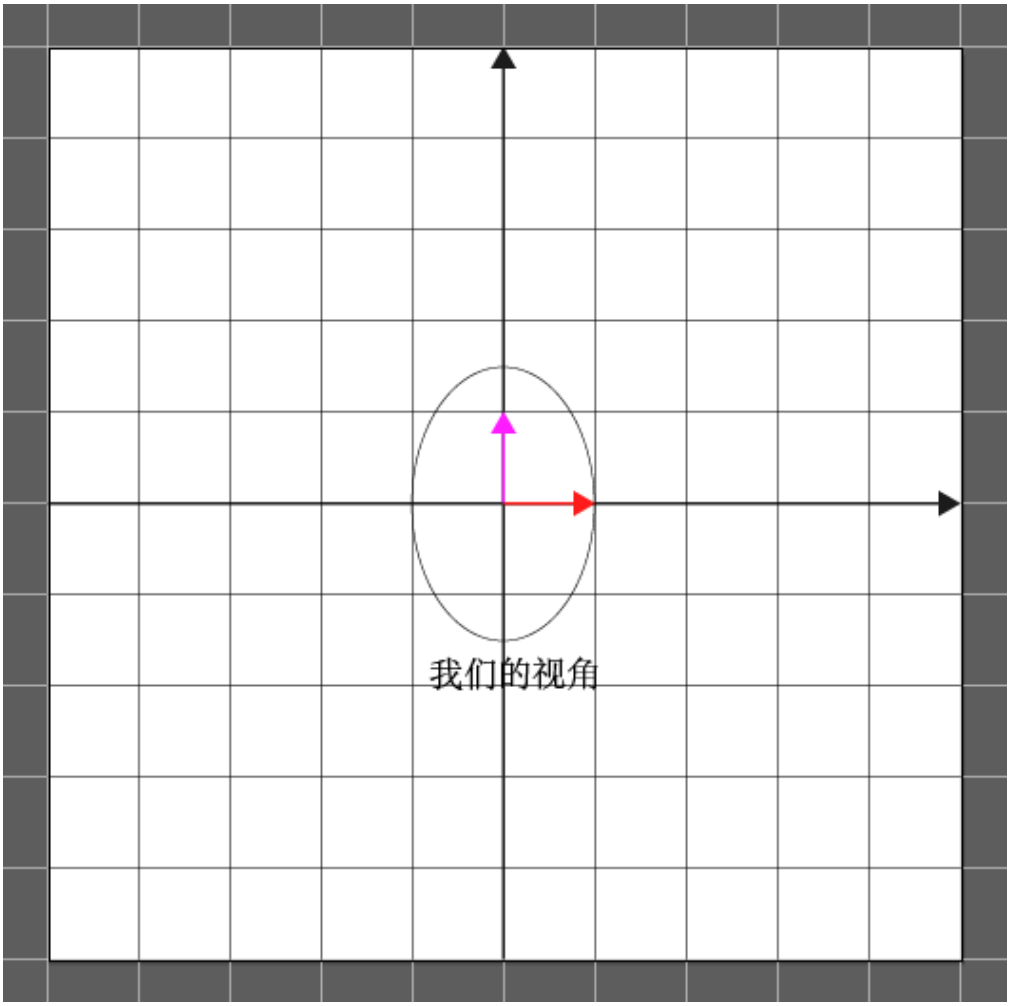
8.2 二次型保形

看个椭圆的例子。在詹妮弗的视角上，她看到的是一个立起来的鸡蛋（椭圆）。而我们和她的角度有旋转30°.但是我们要指导她做一些操作。首先就要矫正她成为我们的视角。

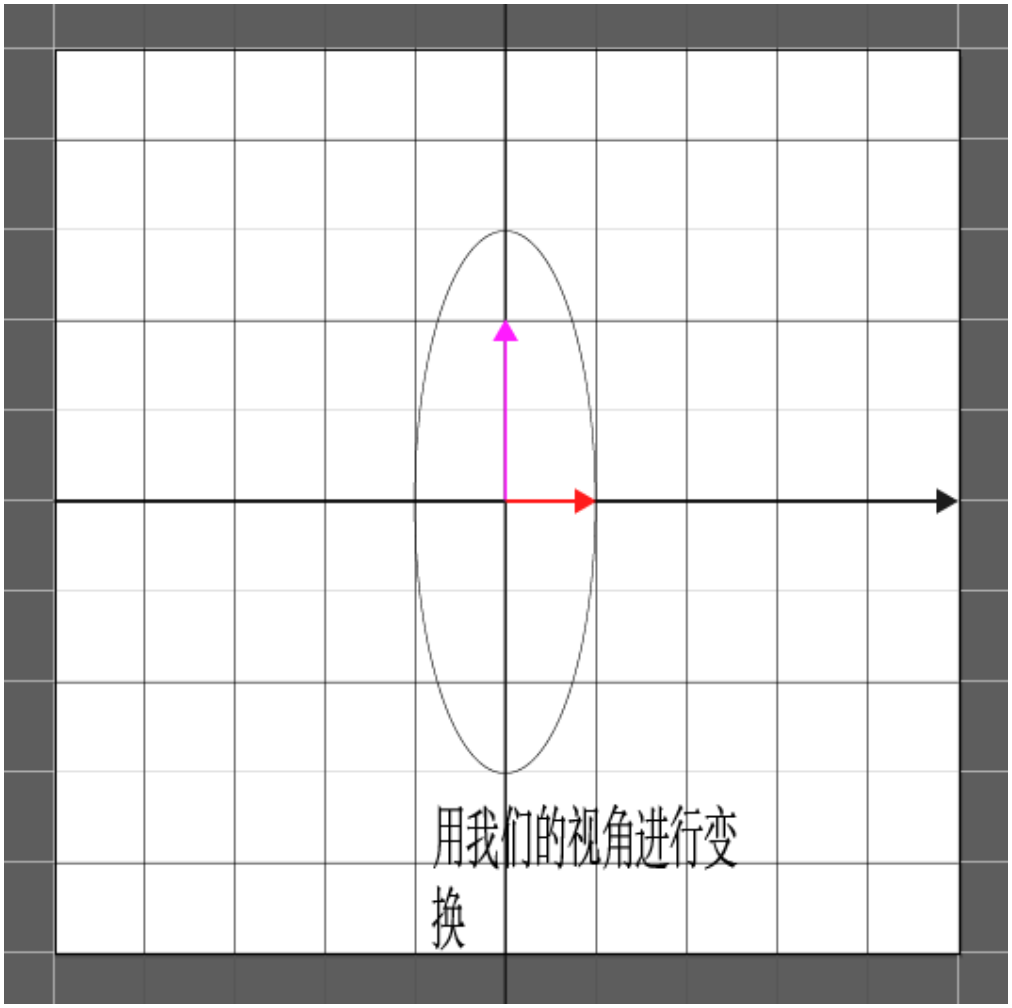
詹妮弗的视角图：



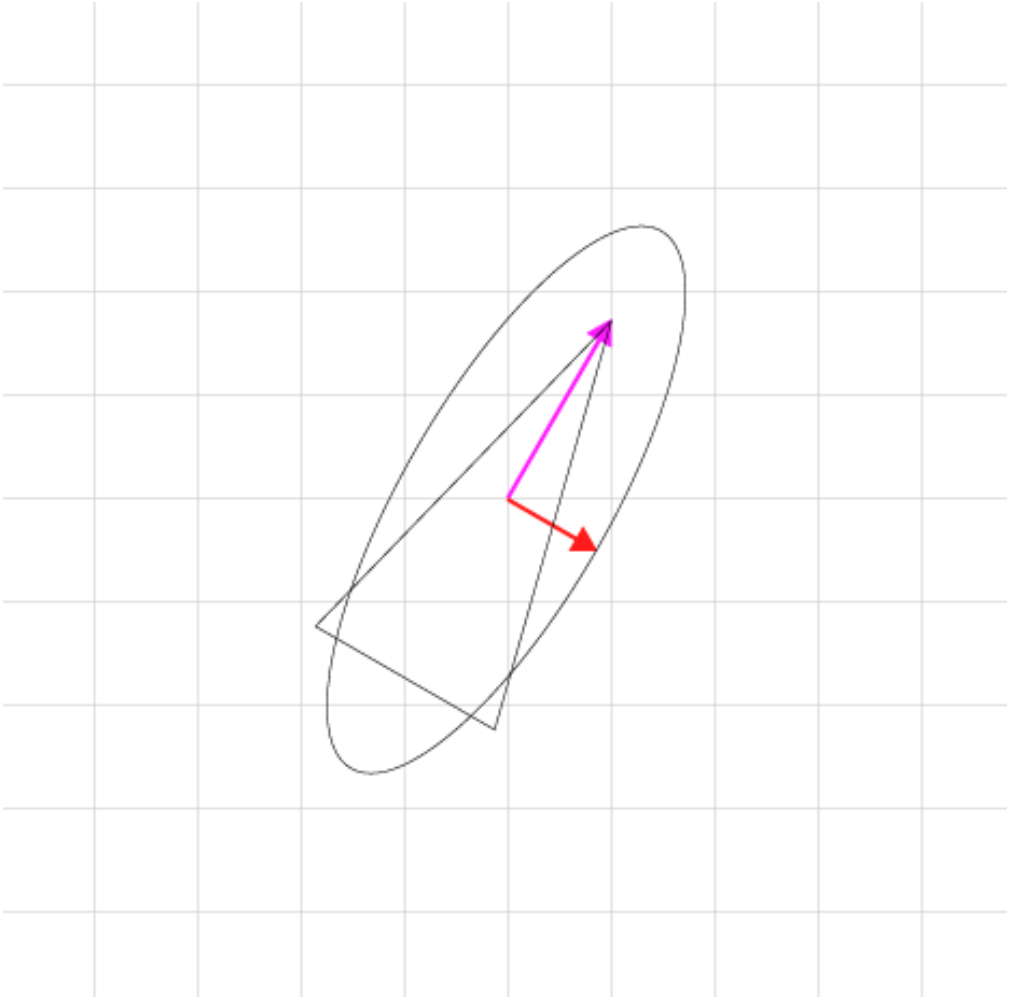
左旋



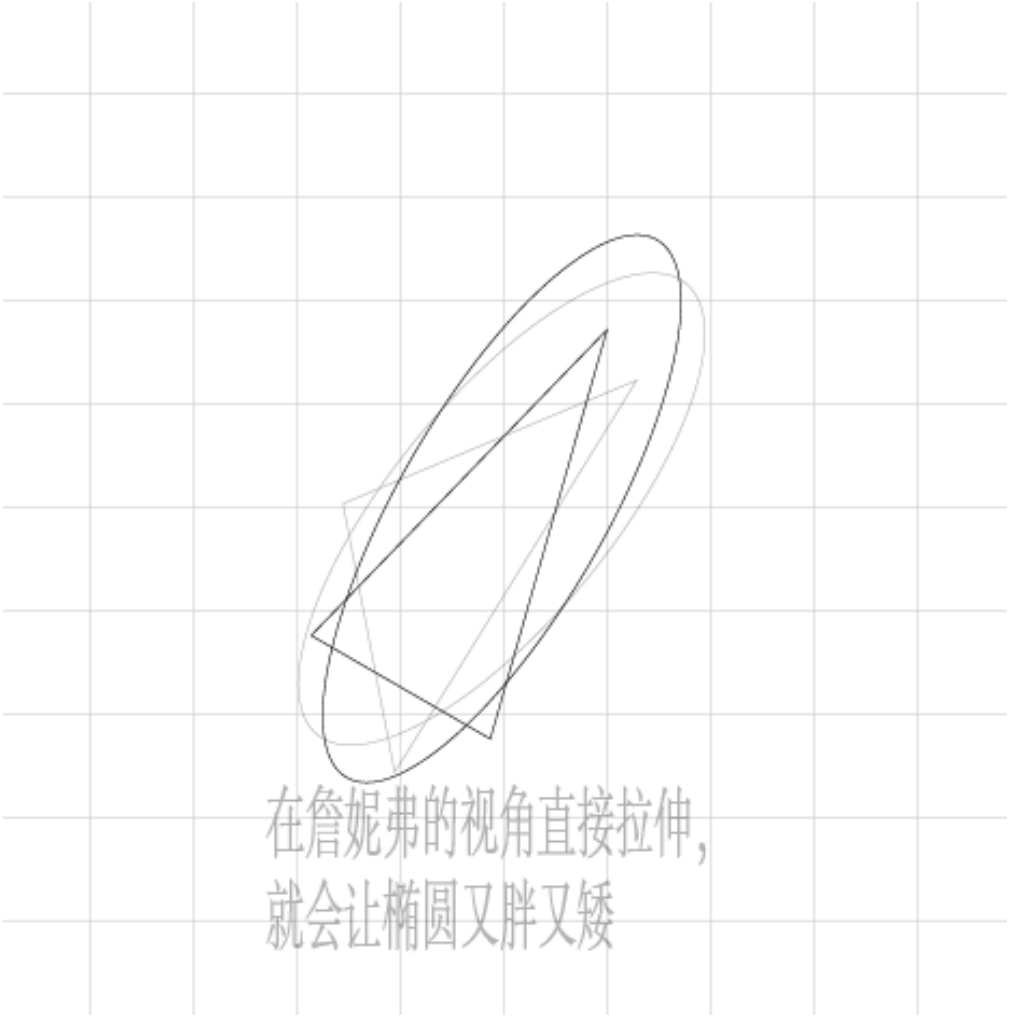
垂直拉伸



右旋



对比在詹妮弗视角上直接拉伸



站在我们的视角上，我们要求的椭圆直接拉伸，要更长、更瘦。

可以看到，只进行一次基变换的拉伸不是对称矩阵。而两次旋转的是对称矩阵。

8.2.1 正应变、切应变

在材料力学上分别被称作 x 方向和 y 方向上的正应变。如果蚂蚁在矩形木块上判断x轴和y轴分别受到的横向的拉力和纵向的压力。那么它可以在木板上画一个正方形，然后旋转角度，当受力后，正方形两边的夹角会发生变化。从而得知均匀载荷引起的均匀形变。如果木板两个方向上的形变正好想等那么就是各向同性。如果不等，描述木板的变形状态需要一个2×2个信息来表示它。

我们知道，当木板发生形变时，木板上每一点都会偏离原来的位置。

我们假设木板原来的长度为 L ，它在均匀载荷作用下，沿着横向(记为 x 方向)变化了 dL_x ，沿着纵向(记为 y 方向)变化了 dL_y 。

我们将变化量与原长的比例记为：$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}L_x}{L} \\ \frac{\mathrm{d}L_y}{L} \end{bmatrix}$

它们在材料力学上分别被称作 x 方向和 y 方向上的正应变。注意这里的S和清华大学出版社《弹塑性力学引论》中的S不一样。这里的S相当于那里的ε

不过，这个计算方式只适用于整个木板，而具体到木板上的某一个点，我们会用这样一个式子来

计算正应变： $\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}$

其中， (u_x, u_y) 是指木板变形前原坐标为 (x, y) 的点P、在木板变形后的位移，即：

$(u_x, u_y) = (\tilde{x} - x, \tilde{+}y - y)$

($\tilde{x}, \tilde{y}$ 分别指木板变形后点P的新坐标)

在形变量不太大、且不追求精确的情况下，小方格两个邻边的夹角变化，可用 xy 平面上的切应变，记为 s_{xy} 或 s_{yx} 。它们是这样计算的：

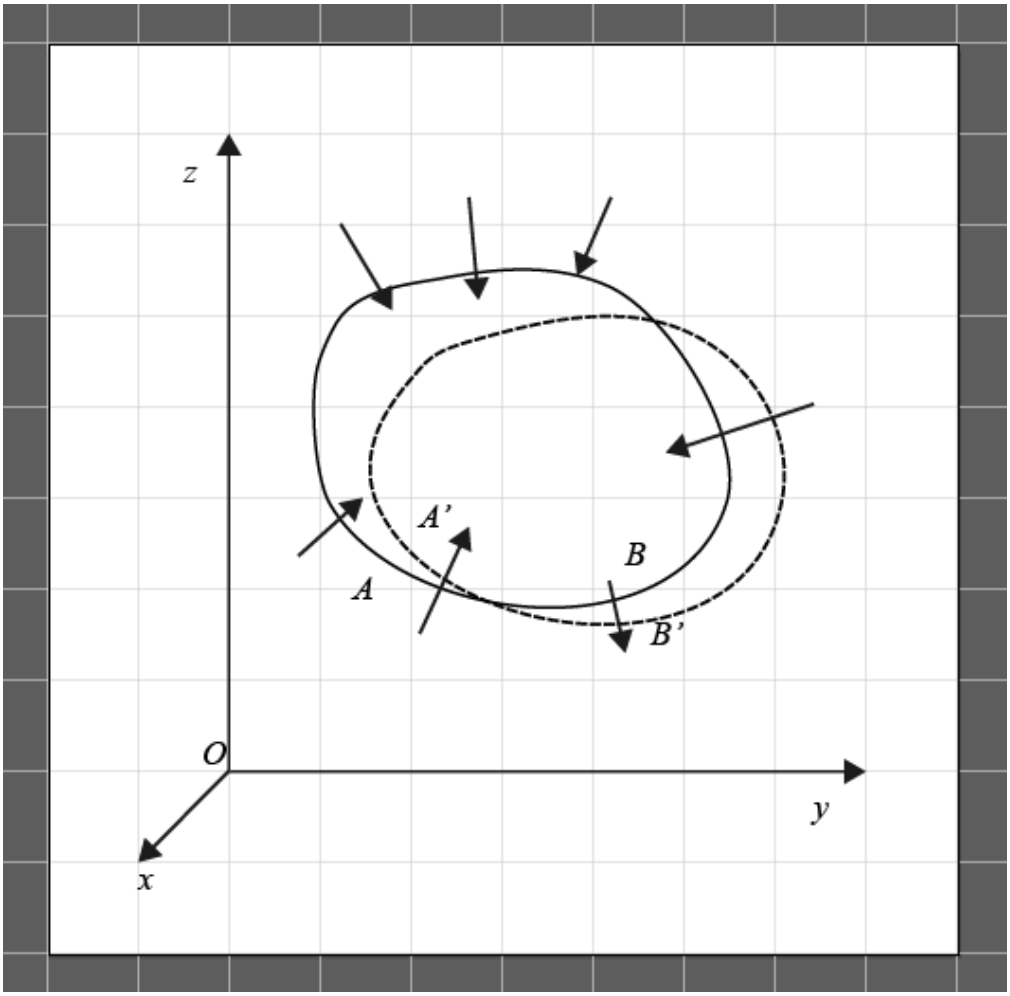
$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$

注意到了吗？这里切应变的运算，牵涉到了两个坐标 x 和 y.

这就告诉我们，在非特殊(小方格与木板边缘平行)情况下，描述木板的变形状态需要一个2×2个信息来表示它。

以下摘自清华大学出版社《弹塑性力学引论》。

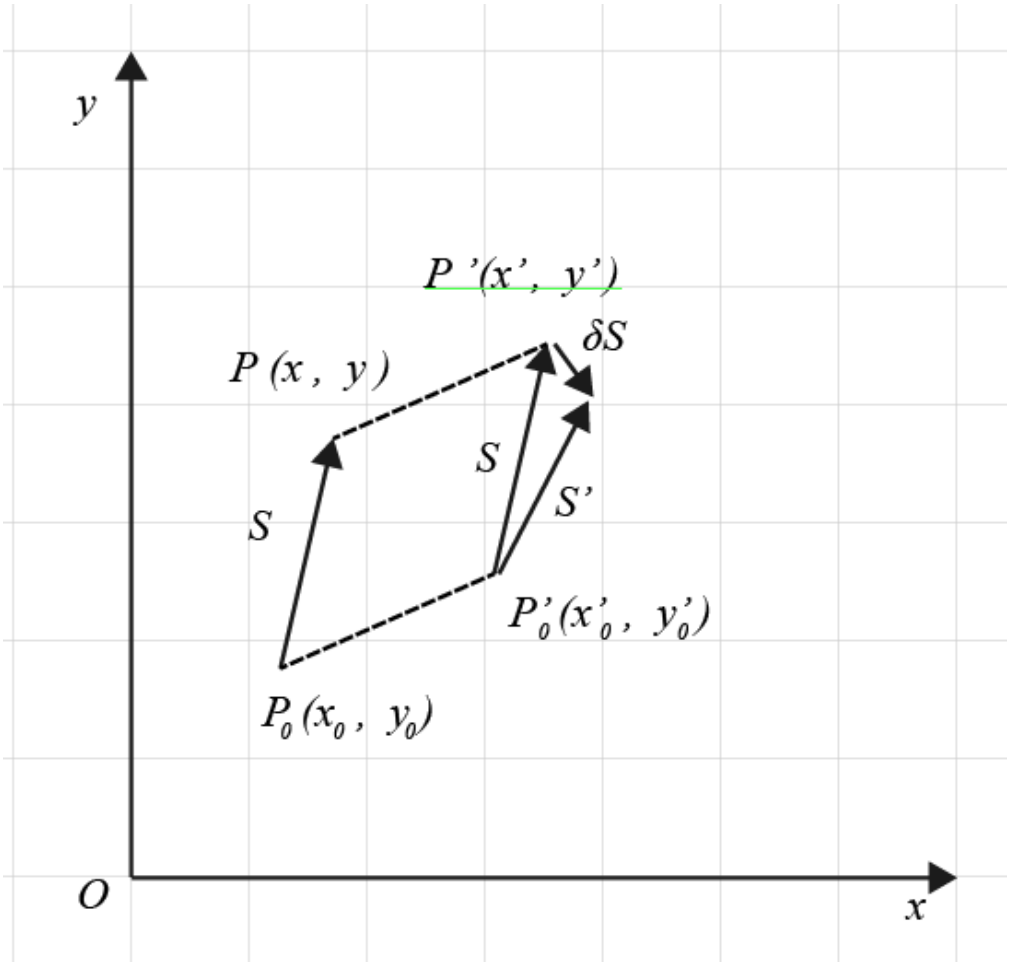
8.3 为什么用角度来衡量切应变？



设有一塑性体，在外力作用下发生了变形。物体中的点A和B，变形后的位置为A'和B'。各点的位移可以用其x,y,z方向的位移分量u,v,w表示。因而只要确定了物体各点的位移，物体的变形状态就确定了。因物体各点的位移一般是不同的，故位移分量u,v,w应为坐标的函数，即

$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z)$

为确定物体各点的位移，我们首先研究物体中任一微笑线段的变形状态，以此逐步阐述应变的概念。



设在Oxy平面内未变形物体中相邻的两点$P_0(x_0, y_0)$和$P(x, y)$间的线段为P_0P，变形后该线段两端分别移到$P_0'(x_0', y_0')$和$P(x', y')$。如P_0P用S表示，变形后为S'。S沿x, y轴的分量为S_x, S_y，而S'为

$$S_x' = S_x + \delta S_x$$

$$S_y' = S_y + \delta S_y$$

P_0点的位移分量为：

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= x_0' - x_0 \\ v_0 &= y_0' - y_0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

P点的位移分量为：

$$\left.\begin{aligned} u &= x' - x \\ v &= y' - y \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

假定u, v为x, y的单值连续函数，则可将P点位移对P_0按泰勒级数展开，即有：

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} S_x + \frac{\partial u}{\partial y} S_y + o(S_x^2, S_y^2) \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} S_x + \frac{\partial v}{\partial y} S_y + o(S_x^2, S_y^2) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由于P就在P_0的邻域，S是个小量，故S_x, S_y的二次项认为是可以略去不计的高阶无穷小量。

将(7)、(8)带入(9)，可得

$$(x' - x) - (x'_0 - x_0) = \frac{\partial u}{\partial x} S_x + \frac{\partial u}{\partial y} S_y$$
$$(y' - y) - (y'_0 - y_0) = \frac{\partial v}{\partial x} S_x + \frac{\partial v}{\partial y} S_y$$

而矢量S, S'的变化为：

$$\delta S_x = S'_x - S_x = (x' - x) - (x'_0 - x_0)$$
$$\delta S_y = S'_y - S_y = (y' - y) - (y'_0 - y_0)$$

于是有：

$$\left.\begin{array}{ll} \delta S_x & = \frac{\partial u}{\partial x} S_x + \frac{\partial u}{\partial y} S_y \\ \delta S_y & = \frac{\partial v}{\partial x} S_x + \frac{\partial v}{\partial y} S_y \end{array}\right\} \tag{10}$$

或简写为

$$\delta S_i = u_{i,j} S_j \tag{11}$$

其实就是

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} S_x + \frac{\partial u}{\partial y} S_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} S_x + \frac{\partial v}{\partial y} S_y \end{bmatrix}$$

在二维情况$i, j = x, y$，此时$u_{i,j}$为：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在三维情况$i, j = x, y, z$，此时$u_{i,j}$为：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

称为相对位移张量。

刚体位移并不引起物体的形变，在应变分析中不需考虑，故而应从以上的公式中消去表示刚体移动的一部分位移。为此，我们设想S经刚体位移移至S'的位置。此时，因长度没有变化，故有：

$S^2 = S'^2 = (S_x + \delta S_x)^2 + (S_y + \delta S_y)^2$

展开上式，并略去δS_i的高阶无穷小量后，得：

$S^2 = S^2 + 2(S_x \delta S_x + S_y \delta S_y)$

由此得$S_x \delta S_x + S_y \delta S_y = 0$

或者说$S_i \delta S_i = 0$

与(11)比较，有

S_x

$S_i \cdot \delta S_i = S_i \cdot u_{i,j} S_j = 0$

或即：

$(S_y + S_x)(\frac{\partial u}{\partial x}S_x + \frac{\partial u}{\partial y}S_y)$，得：
$\frac{\partial u}{\partial x}S_x^2 + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})S_xS_y + \frac{\partial v}{\partial y}S_y^2 = 0$
由S_x, S_y的任意性，上式系数全为0才能满足，得：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

同样地，当在Oyz平面和Ozx平面讨论时，可得出另外三个条件：
$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$
$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$
从而当在Oxyz空间讨论时，则同时得到以下6个条件：
$u_{i,j} = -u_{j,i}$
这就是说，对应于刚体移动的相对位移张量，必为反对称张量。

任何一个二阶张量都可以惟一地分解成一个对称张量和一个反对称张量。因而$u_{i,j}$可分解成如下两个部分：

$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$
或：
$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$
此处

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ε_{ij}即为应变张量，ω_{ij}即为转动张量
对于三维情况，应变张量为：

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

转动张量为：

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) & 0 \end{bmatrix}$$

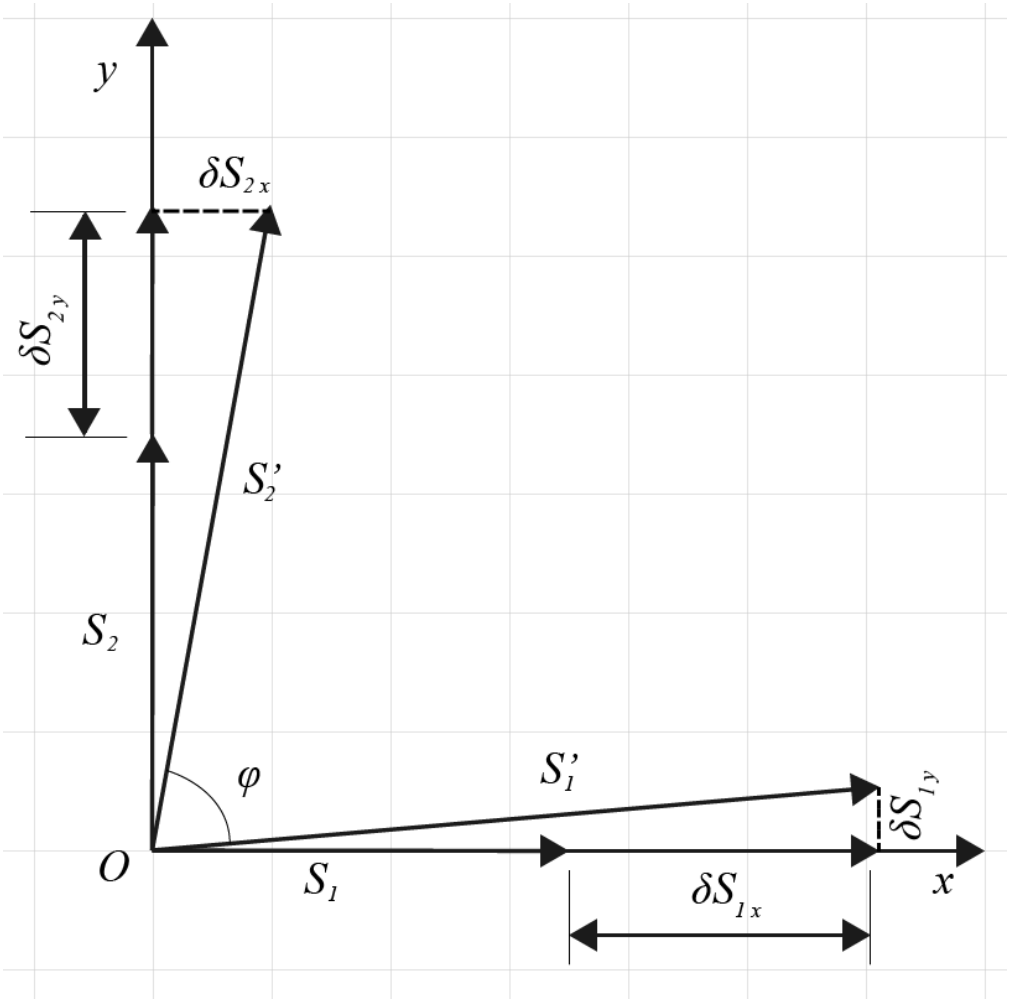
这样，对于纯变形来说，方程(11)化为
$\delta S_i = \varepsilon_{ij}S_j$
现在说明应变张量ε_{ij}的物理意义。如S平行x轴，则
$S_x = S, S_y = 0$

则（10）化为

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_x = \frac{\delta S_x}{S_x} = \frac{\delta S}{S}$

可见，ε_x表示原来与x轴平行的矢量的单位长度的伸长（或压缩），称为线应变或正应变。同理可知ε_y和ε_z的物理意义也是线应变。

如果两个矢量S_1, S_2变形前分别平行与Ox, Oy轴，如下图



i, j分别为Ox, Oy方向的单位矢量，则

$$S_1 = iS_1$$
$$S_2 = iS_2$$

变形后，S_1, S_2分别变为S_1', S_2'显然有：

$$\left.\begin{aligned} S_1' &= i(\delta S_{1x} + S_1) + j\delta S_{1y} \\ S_2' &= i\delta S_{2x} + j(\delta S_{2y} + S_2) \end{aligned}\right\}$$

令S_1'与S_2'的夹角为φ，则由两矢量的内积定义，有

$$S_1' \cdot S_2' = S_1' S_2' cos\varphi \tag{12}$$

几何意义是 $\vec{a}$在 $\vec{b}$上的投影：

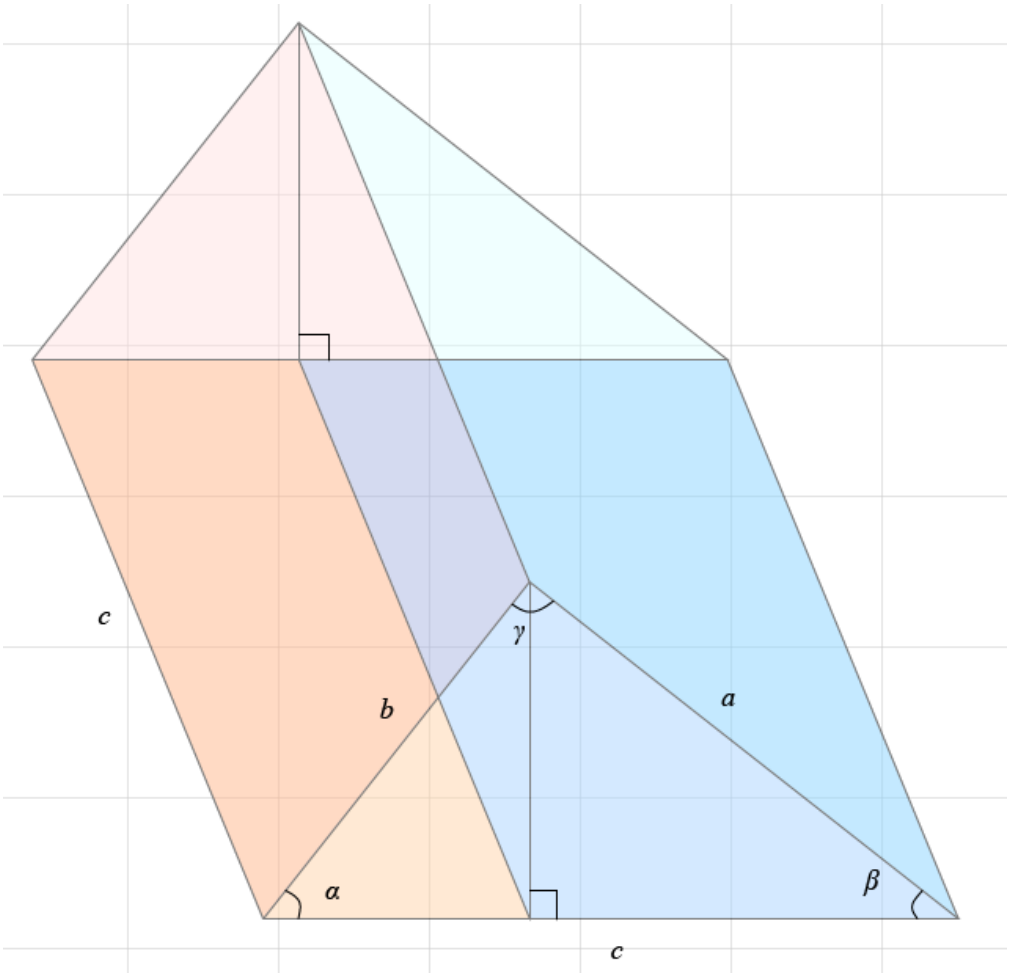
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * cos\theta$

8.4 余弦定理

余弦定理：

若$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$，则

$c^2 = a^2 + b^2 - 2|a||b|cos\theta$



上图可知

$c^2 = accos\beta + bccos\alpha$

同理可得其他两张图的结论：

$a^2 = accos\beta + abcos\gamma$

$b^2 = bccos\alpha + abcos\gamma$

可证。同时可以找到点乘的几何意义：

$bccos\alpha$就是上图中左侧由粉色到橘色的投影。两个投影相加，就得到公共边（投影到的边）的平方。两个长方形的投影，相加得到正方形。其物理意义是，向右上的力F（这里记为$\vec{b}$）拖动物体位移x(这里记为$\vec{a}$)，则两个矢量的乘积得到功这个标量。力只在物体运动的方向做功。

而

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

两个向量的点积等于向量对应分量的点积相加。

两个向量的点积等于两个向量的模相乘再乘以夹角的余弦。

$$S_1' \cdot S_2' = (S_{1x}' i + S_{1y}' j) \cdot (S_{2x}' i + S_{2y}' j) = \begin{bmatrix} S_{1x}' i & S_{1y}' j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{2x}' i \\ S_{2y}' j \end{bmatrix} = S_{1x}' \cdot S_{2x}' + S_{1y}' \cdot S_{2y}'$$

上式推导参见（2）

其中，$S_{1y}' = \delta S_1, S_{2x}' = \delta S_2$，故：

$S_1' \cdot S_2' = (S_1 + \delta S_{1x})\delta S_{2x} + \delta S_{1y}(S_2 + \delta S_{2y})$

因为S_1, S_2均为小量，故略去δS的二次微量后，得：

$S_1' \cdot S_2' = S_1 \delta S_{2x} + S_2 \delta S_{1y}$

由（12），有：

$cos\varphi = \frac{S_1' \cdot S_2'}{S_1' S_2'} = \frac{S_1 \delta S_{2x} + S_2 \delta S_{1y}}{[(\delta S_{1y})^2 + (\delta S_{1x} + S_1)^2]^{\frac{1}{2}} [(\delta S_{2x})^2 + (\delta S_{2y} + S_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$

略去高阶微量后，得：

$cos\varphi \cong \frac{S_1 \delta S_{2x} + S_2 \delta S_{1y}}{S_1 S_2} = \frac{\delta S_{2x}}{S_2} + \frac{\delta S_{1y}}{S_1} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}$

另一方面，令S_1, S_2间夹角的改变为α，并注意到α为一小量，则有：

$cos\varphi = cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sin\alpha = \alpha$

由$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$，得：

$\alpha = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$

由此可知，ε_{xy}表示变形前与坐标轴x, y正方向一致的两正交线段，在变形后的夹角减小量之半，即$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\alpha$.

如将变形前与Ox, Oy轴正向一致的相互垂直的两线段在变形过程中发生的夹角该变量称为剪应变γ_{xy}，则

$\gamma_{xy} = \alpha = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

或

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

剪应变的正负号规定为：当两个正向（或负向）坐标轴间的直角减小时为正，反之为负。于是我们得到了二维应变情况下的全部（三个）应变分量：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{y} + \frac{\partial v}{x} \end{aligned}\right\}$$

对于平面问题，一点处的应变状态就由这三个应变分量完全确定。

显然x轴与y轴间的角度变化及y轴与x轴的角度变化是没有什么不同的，即有：

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$

称为位变位移关系式。用张量符号可缩写为：

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

由以上讨论可知，当i = j时，得到的是正应变。当$i \neq j$时，得到的是剪应变。对剪应变有：

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

以上摘自清华大学出版社《弹塑性力学引论》。写得可真详细。

（接上）所以应变张量的坐标分量可以写成一个2×2矩阵：

$$S = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} \\ S_{yx} & S_y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

这个矩阵的对角分量 S_{11}, S_{22} 分别表示 x 方向上和 y 方向上的正应变，而它的非对角分量，有 $S_{12} = S_{21}$ ，表示小方格在木板平面上随木板形变产生的切应变。

这个矩阵就对应了一个二阶张量(后面我们会解释张量的阶数)，叫做应变张量。

对于正应变，应变张量矩阵是：

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

对于切应变，是正应变时的木板，旋转了一个角度φ，此时新的坐标就是：

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$$ 该矩阵简记为R。

对于这个2阶张量 S_{ij} 而言，它的变换将会用到两次旋转变换矩阵（保形，否则参见章节8.2），它在坐标旋转下的变换关系： $S' = R^{-1}SR.$

张量是一种数学对象。它根据（空间的）基向量的改变而发生特殊的改变。0阶张量就是标量，1阶张量就是一个向量。2阶张量，代表一个基矩阵的一个维度的向量的2阶分身、与其他基向量的分身的排列组合。所以二阶可以写成一个二维矩阵的形式。3阶张量就比较复杂了。直观解释张量：协变、逆变、秩：（研究三维基向量在二维平面上的投影，即可以利用二维矩阵来表达）

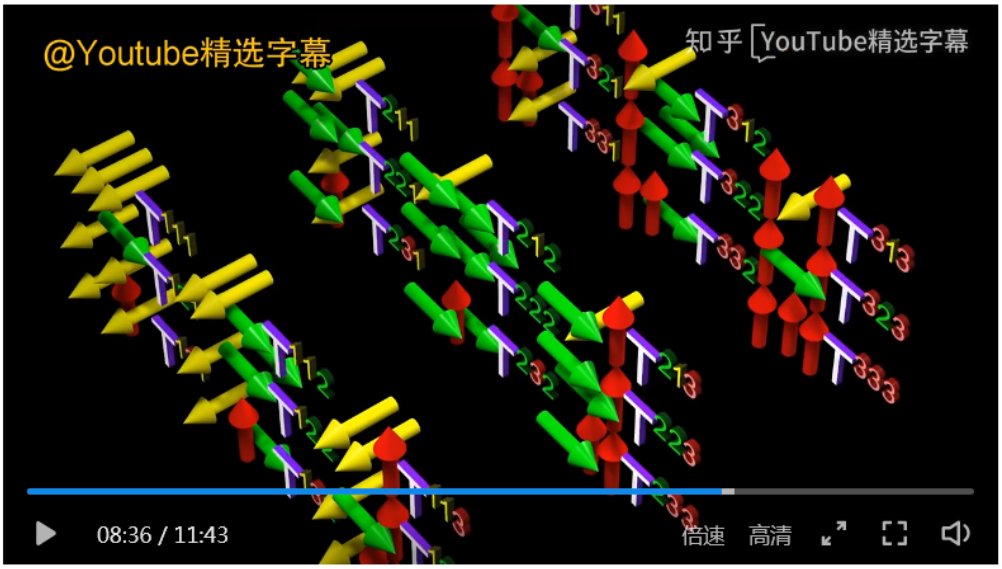


图 1: 三个向量的二阶张量

对于2阶张量而言，我们通过电磁张量已经知道，一个2阶张量 T 一共有3种形式：逆变形式 $T'^{\mu\nu}$ 、混合形式 $T'^{\mu}_{\ \nu}$ 、以及协变形式 $T'_{\mu\nu}$ ，它们在参考系变换下分别满足：

$$\begin{cases} T'^{\mu\nu} &= \sum_{\beta=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3}\left(\Lambda^{T}\right)^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\beta} \\ T'^{\mu}_{\ \nu} &= \sum_{\beta=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3}\left[\left(\Lambda^{-1}\right)^{T}\right]^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha\beta}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\beta} \\ T'_{\mu\nu} &= \sum_{\beta=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3}\left(\Lambda^{T}\right)^{\mu}_{\alpha} T^{\alpha}_{\ \beta}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}_{\nu} \end{cases}$$

这些计算看起来有点复杂，但好在它们还是2阶张量，可以写成4×4的矩阵，因此如果我们仔细观察上面的关系，就会发现它们其实就是这样几个矩阵变换关系：

$$\begin{cases} T'_{\text{ctv}} &= \Lambda^T T_{\text{ctv}} \Lambda \\ T'_{\text{mix}} &= \Lambda^T T_{\text{mix}} \Lambda^{-1} \\ T'_{\text{cov}} &= \left(\Lambda^{-1}\right)^T T_{\text{cov}} \Lambda^{-1} \end{cases}$$

其中脚下标ctv, mix, cov分别表示逆变(contravariant)、混合(mixed)和协变(covariant)分量的矩阵形式。

2阶张量中的逆变形式就是(2,0)型张量，混合形式就是(1,1)型张量，而协变形式就是(0,2)型张量。

于是旋转后的应变张量矩阵就是：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c^2 S_x - s^2 S_y & cs(S_x - S_y) \\ cs(S_x - S_y) & s^2 S_x - c^2 S_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

我们可以看到，在新的方格上，也就是在新的坐标系下， S''_{12}, S''_{21} 不再等于0(但它是个对称矩阵)，方格上的切应变从张量观点得到了解释。

而我们还能从上面的式子中看出，如果木板两个方向上的形变正好相等(也就是各向同性)，那么应变矩阵在任何参考系下切应变分量都为0，也就是只有正应变。这就意味着小方格无论沿着什么方向画，都能保持正方形不变，这和我们的直观认识是一致的。

至此，我们也直观看到了应变张量如何“像张量一样变换”：

当小蚂蚁画的小方格旋转时，小方格对应的应变张量的分量满足某种合同变换(这个变换对应的变换矩阵是坐标旋转矩阵)，但木板本身的形变状态是与小方格角度的选取无关的，这就说明了应变张量本身没有发生改变。

8.5 合同变换法

除了用传统的正交变换法以及配方法之外，有些同学可能还熟悉另一种方法，即合同变换法。

合同变换法的原理其实很简单，即因为任意可逆矩阵都可以表示成初等矩阵的积，则我们可以令$C = P_1 P_2 \cdots P_n$ ，其中 $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 均为初等矩阵，我们将 A 与 E 并成 [A—E] ，然后，对 A 和 E 同时做行变换，然后再对 A 做一次对应的列变换，便可将 A 化为 Λ 的同时，将 E 化为 C^T,即：

$[A|E] \to \left[P_n^T \cdots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_n | P_n^T \cdots P_2^T P_1^T\right] = \left[C^T A C | C^T\right] = \left[\Lambda | C^T\right]$

然后再将 C^T 取转置便可得到要求的可逆矩阵 C 。

对于上例，采用合同变换法的步骤为：

$$[A|E] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9 张量和矩阵

说了那么多张量的表现形式。又用矩阵来描述了二阶张量的变化。但是三个向量张成的三阶张量就已经无法用矩阵描述了。张量远比矩阵承载的内容多。在某一个可见的坐标系内。张量可以用张成它的其中一个向量$\vec{V}$的基（多个维度），逆变分量V_1, V_2, V_3、协变分量V^1, V^2, V^3和另一个向量$\vec{P}$的逆变分量P_1, P_2, P_3、协变分量P^1, P^2, P^3，来描述他俩张成的张量。

而矩阵，只能描述一个平面、二维坐标系的线性变换。而高维的变换又可以拆成2维加n维的变换。就如同，1维为基础张成的2维平面。这样看来。变换本身这种信息矩阵，所描述的向量，也就是一阶张量。由一个原点开始，由一个向量（方向、长度），延伸张成的空间，就是一个向量。两个向量除了延伸还有之间所夹的面。她们两个线性组合出来的新的向量，就在所夹的面上。而新向量到两个原向量做垂线，然后投影。可以得到两个原向量的协变分量。协变分量乘以逆变分量就能得到新向量到原分量的唯一不变的张量分量。由此来描述一个任何基变换之后坐标系内的张量。那么得数都将是固定的。这就是我们要找到的永恒的不变的张量。但是张量从定义向量开始，就是一种变换法则。